THÉORÈMES D'ÉQUIDISTRIBUTION POUR LESSYSTÈMES DYNAMIQUES D'ORIGINE ARITHMÉTIQUE

Antoine Chambert-Loir

Panoramas et Synthèses

Numéro 30

2010

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

Panoramas & Synthèses
30, 2010, p. 203–294

THÉORÈMES D'ÉQUIDISTRIBUTION POUR LES SYSTÈMES DYNAMIQUES D'ORIGINE ARITHMÉTIQUE

par

Antoine Chambert-Loir

Résumé. – Ce texte est une introduction à quelques problèmes arithmétiques liés aux systèmes dynamiques issus de la géométrie algébrique. Le premier chapitre explique la théorie des hauteurs. Le second est consacré aux systèmes dynamiques polynomiaux polarisés; il introduit un certain nombre de conjectures et présente le théorème d'équidistribution des points de petite hauteur. Dans un dernier chapitre, nous démontrons ce théorème d'équidistribution dans le cas d'un endomorphisme de la droite projective et en donnons quelques applications.

***Abstract* (Equidistribution theorems in algebraic dynamics).** – This text is an introduction to some arithmetic problems related to dynamical systems in algebraic geometry. The first chapter is an exposition of the theory of height functions. The second is devoted to polarized dynamical systems; we introduce various conjectures and present the equidistribution theorem of points of small heights. In a final chapter, we prove this equidistribution theorem in the particular case of an endomorphism of the projective line, and give some applications.

Introduction

Ce texte est une introduction à quelques problèmes arithmétiques liés aux systèmes dynamiques issus de la géométrie algébrique. Il se comporte de trois chapitres assez autonomes, issus des trois exposés que j'avais faits lors des *États de la recherche* en mai 2006 à Rennes.

Le premier chapitre, *Hauteurs sur l'espace projectif*, explique la théorie des hauteurs, initiée par Weil et Northcott, et en démontre les principales propriétés fondamentales, notamment la variation de la hauteur sous l'effet d'un morphisme et le théorème de finitude. La théorie est bien plus simple lorsque l'on se borne au cas du corps des nombres rationnels, car toutes les subtilités liées à la théorie algébrique des

***Classification mathématique par sujets* (2010).** – 11-02, 11G50, 14K15, 37P30, 37F10.
Mots clefs. – Hauteurs, géométrie diophantienne, système dynamique algébrique, équidistribution, conjecture de Manin-Mumford, conjecture de Bogomolov.

© Panoramas et Synthèses 30, SMF 2010

nombres s'évanouissent alors. Nous nous limitons d'ailleurs à ce cas dans le premier paragraphe, et en profitons pour donner un aperçu de ce que cette théorie peut dire des systèmes dynamiques polynomiaux, en particulier de leurs points prépériodiques. C'était en effet la motivation initiale du théorème de finitude. Un dernier paragraphe, d'esprit plus analytique, exprime la hauteur d'un point comme somme de termes locaux ; le formalisme des fonctions de Green que nous introduisons est inspiré du langage de la géométrie d'Arakelov.

Le second chapitre est consacré aux systèmes dynamiques polynomiaux et, principalement, à ceux qui sont *polarisés* au sens de ZHANG (2006). Nous expliquons un certain nombre de conjectures arithmétiques les concernant, en tâchant de décrire quelques exemples et quelques démonstrations. De fait, la résolution de certaines de ces conjectures dans l'exemple du système dynamique donné par la multiplication par 2 dans une variété abélienne est l'une des grandes avancées du sujet dans les années 1980–2000. Nous introduisons enfin le théorème d'équidistribution de SZPIRO et al. (1997) et ébauchons son application à la résolution des conjectures évoquées, ainsi que quelques généralisations. Peu de temps avant que ce texte n'entre sous presse, j'ai appris l'existence du contre-exemple de GHIOCA & TUCKER (2009) à certaines de ces conjectures ; nous en profitons pour le décrire.

La preuve de ce théorème d'équidistribution requiert tout l'arsenal de la géométrie d'Arakelov et sort du cadre de ces notes. Dans un dernier chapitre, nous le démontrons dans le cas particulier d'un système dynamique associé à une fraction rationnelle de degré $\geqslant 2$ en une variable. Suivant la méthode de BILU (1997), nous montrons enfin comment un cas particulier implique certaines des conjectures du chapitre 2 pour les systèmes dynamiques toriques.

Chacun des chapitres se termine par quelques exercices et compléments, parfois issus de la littérature récente.

Depuis une dizaine d'années, l'étude arithmétique des systèmes dynamiques polynomiaux s'est considérablement développée. L'objet initial de ces exposés était d'expliquer à un public principalement issu de la dynamique holomorphe les théorèmes d'équidistribution en géométrie d'Arakelov. Le lecteur interessé trouvera dans l'ouvrage SILVERMAN (2007) de nombreux développements qui n'ont pu trouver leur place dans ce texte.

Je remercie les organisateurs de m'avoir invité à donner ce cours, et le public, nombreux, pour sa participation. Je remercie aussi P. Autissier, M. Baker, S. Cantat, T.-C. Dinh, V. Guedj, L. Moret-Bailly, N. Sibony, ainsi que le rapporteur, pour leurs commentaires pendant la conférence ou sur des versions préliminaires de ce texte. Je remercie enfin D. Ghioca et T. Tucker de m'avoir autorisés à inclure leur contre-exemple, non encore publié.

Chapitre 1
Hauteurs sur l'espace projectif

La méthode de « descente infinie » initiée par Pierre de Fermat (1601–1665) dans l'étude des équations diophantiennes repose sur trois piliers :

– une notion de *taille* d'une solution d'une telle équation ;
– à partir d'une solution donnée, la construction d'une solution de taille moindre ;
– le fait que ces tailles — usuellement des nombres entiers — ne peuvent diminuer indéfiniment.

Cette méthode a permis à Fermat d'établir des résultats négatifs, par exemple l'inexistence de triangles rectangles à côtés entiers dont l'aire soit un carré parfait, problème qui se ramène à « l'équation de Fermat » de degré 4. Elle intervient aussi dans la démonstration par Ernst Kummer (1810–1893) du grand théorème de Fermat pour les nombres premiers réguliers(1). Plus remarquablement peut-être, elle a aussi permi de prouver des résultats positifs ; citons par exemple la démonstration (1747) de Leonhard Euler (1707–1783) que tout nombre premier congru à 1 modulo 4 est somme de deux carrés (un théorème annoncé par Fermat lui-même en 1640).

Cette méthode a deux avatars modernes. Le premier, la *théorie des hauteurs*, auxquelles ce texte est consacré, est une version géométrisée de la notion de taille d'une solution d'une équation diophantienne. Elle fut développée à la fin des années 40 par André Weil (1906–1998) et Douglas Geoffrey Northcott (1916–2005). C'est en effet l'un des deux ingrédients de la preuve du théorème de Mordell–Weil selon lequel les points rationnels d'une variété abélienne définie sur un corps de nombres forment un groupe abélien de type fini (voir par exemple SERRE (1997)). Northcott utilisa ce concept de hauteur pour établir des propriétés arithmétiques de certains systèmes dynamiques ; nous y reviendrons amplement.

L'autre ingrédient de la démonstration du théorème de Mordell–Weil résulte du théorème de finitude de Hermite–Minkowski en théorie algébrique des nombres et d'un argument de cohomologie galoisienne. Son élaboration moderne, *variétés de descente*, lois de réciprocité et *principes local-global*, sort largement du cadre de cet article. Je renvoie au survol (1992) de J.-L. Colliot-Thélène pour une première introduction.

Revenons aux hauteurs. Dans les applications modernes à l'arithmétique, il est souvent utile, voire crucial, d'assouplir le strict point de vue « équationnel » des classiques pour mieux exploiter les propriétés géométriques des objets étudiés. On est ainsi plutôt amené à définir la hauteur d'un point de l'espace projectif, voire d'une variété projective, et à étudier le comportement de cette hauteur par des morphismes de variétés algébriques. Il faudra étendre les définitions naïves que l'on peut adopter pour les nombres entiers au cas des nombres algébriques. Nous commençons cependant

(1) Ce sont les nombres premiers p qui ne divisent pas le numérateur d'un des nombres de Bernoulli $B_2, B_4, \dots, B_{p-3}$, ou plus conceptuellement, les nombres premiers p tel que le groupe des classes d'idéaux du corps cyclotomique $\mathbf{Q}(\zeta_p)$ soit d'ordre premier à p.

ce cours par le cas des points rationnels : il fait déjà apparaître les idées principales tout en évitant les complications dues à la théorie algébrique des nombres.

1.1. Hauteur d'un point rationnel

A. Définition

Soit donc k un entier naturel et notons $\mathbf{P}^k$ l'espace projectif de dimension k. Voyons-le comme *schéma*, c'est-à-dire comme la donnée, pour tout anneau A, de l'ensemble $\mathbf{P}^k(A)$ de ses points à coordonnées dans A. De fait, nous n'aurons besoin pour l'instant que du cas où A est un corps F : alors, $\mathbf{P}^k(F)$ n'est autre que l'ensemble des droites vectorielles de l'espace F^{k+1}. Un point $x \in \mathbf{P}^k(F)$ possède ainsi $k+1$ coordonnées $(x_0, \dots, x_k)$ non toutes nulles — celles d'un vecteur directeur quelconque de la droite correspondante — bien définies à un facteur multiplicatif non nul près. Si $(x_0, \dots, x_k)$ est un élément non nul de F^{k+1}, on notera $[x_0 : \dots : x_k]$ le point correspondant de $\mathbf{P}^k(F)$; nous dirons que $(x_0, \dots, x_k)$ en sont des *coordonnées homogènes.*

Considérons dans ce numéro le cas du corps $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels. Soit ainsi x un point de $\mathbf{P}^k(\mathbf{Q})$ — on parle de *point rationnel.* Parmi la multiplicité de ses coordonnées homogènes, on peut en choisir certaines plus particulièrement. Il est en effet loisible de multiplier les x_i par un dénominateur commun ; ce sont alors des entiers relatifs. On les divise alors par leur plus grand diviseur commun, de sorte à obtenir une famille $(x_0, \dots, x_k)$ de coordonnées homogènes formée d'entiers relatifs premiers entre eux dans leur ensemble. Observons alors que deux telles familles ne définissent le même point que si elles diffèrent l'une l'autre par multiplication par ± 1.

Cela montre la correction de la définition suivante :

Définition 1.1.1. – Soit $x = [x_0 : \dots : x_k]$ un point de $\mathbf{P}^k(\mathbf{Q})$, dont les coordonnées homogènes sont des entiers premiers entre eux dans leur ensemble. On appelle *hauteur exponentielle* de x le nombre entier $H(x) = \max(|x_0|, \dots, |x_k|)$. La *hauteur logarithmique* de x est définie par la formule

$$h(x) = \log H(x) = \log \max(|x_0|, \dots, |x_k|).$$

Les deux notions de hauteurs, exponentielle et logarithmique, ont leur intérêt suivant les contextes. Dans ce texte, nous appellerons tout simplement *hauteur* la hauteur logarithmique.

De la définition résulte immédiatement une propriété de *finitude*, facile mais fondamentale.

Proposition 1.1.2. – *Pour tout nombre réel B, l'ensemble des points de $\mathbf{P}^k(\mathbf{Q})$ de hauteur au plus B est fini.*

Démonstration. – En effet, un tel point est déterminé par le choix de $k+1$ entiers relatifs $(x_0, \dots, x_k)$, non tous nuls, et vérifiant $|x_i| \leqslant e^B$ pour tout i. Il n'y a qu'un nombre fini de telles familles d'entiers, d'où la proposition. □