DYNAMIQUE p-ADIQUE

Serge Cantat & Antoine Chambert-Loir

Panoramas et Synthèses

Numéro 30 2010

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

Panoramas & Synthèses
30, 2010, p. 295–342

DYNAMIQUE p-ADIQUE (D'APRÈS LES EXPOSÉS DE JEAN-CHRISTOPHE YOCCOZ)

par

Serge Cantat & Antoine Chambert-Loir

Résumé. – Ce texte est une introduction à la dynamique des fractions rationnelles sur un corps p-adique. Il reprend le cours que Jean-Christophe Yoccoz avait fait lors des *États de la recherche* de mai 2006 et en développe certains points. La plupart des résultats présentés sont dûs à Benedetto, Bézivin, Hsia, Lubin, Morton, Rivera-Letelier et Silverman.

Abstract **(p-adic dynamics (after the talks by Jean-Christophe Yoccoz)).** – This paper is an introduction to the dynamics of rational fractions over a p-adic field. It follows the lectures that Jean-Christophe Yoccoz gave during the *États de la recherche* in May 2006, and develops certain points. Most of the results to be explained here are due to Benedetto, Bézivin, Hsia, Lubin, Morton, Rivera-Letelier and Silverman.

1. Introduction et motivations

Afin de motiver les spécialistes de dynamique holomorphe, formulons quelques problèmes ouverts de dynamique complexe qui peuvent être reliés à des questions de dynamique p-adique (voir **[23]** pour plus de détails).

1.1. Hyperbolicité. – Soit $f \in \mathbf{C}(z)$ une fraction rationnelle d'une variable complexe. Nous identifierons f à l'endomorphisme holomorphe de la droite projective $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ qu'elle induit, et nous noterons d son degré. Nous supposerons toujours que d est supérieur ou égal à 2.

Les points critiques de f sont les points z de la droite projective en lesquels la différentielle de $f : \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \to \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ s'annule ; notons $\mathrm{Crit}(f)$ l'ensemble de ces points. L'ensemble postcritique de f est la réunion des orbites positives des points critiques de f :

$$P(f) = \bigcup_{\substack{n>0 \\ y \in \mathrm{Crit}(f)}} f^n(y).$$

Les points périodiques de f peuvent être organisés en trois catégories de la manière suivante. Soit z un point périodique de période p. La différentielle de f^p au point z

est une application linéaire de $T_z(\mathbf{P}^1(\mathbf{C}))$ dans lui même ; c'est donc une homothétie dont le rapport est noté $(f^p)'(z)$. Lorsque z est différent de ∞, $(f^p)'(z)$ est la dérivée usuelle de la fraction rationnelle f^p, évaluée en z. On dit que

– z *est répulsif* si $|(f^p)'(z)| > 1$,
– z *est indifférent* si $|(f^p)'(z)| = 1$,
– z *est attractif* si $|(f^p)'(z)| < 1$, et *super-attractif* si $(f^p)'(z) = 0$.

Lorsque z est un point périodique attractif de période p, l'orbite de z est un cycle attractif : il existe un ouvert de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ contenant l'orbite de z tel que l'orbite de tout point dans cet ouvert soit attirée par l'orbite de z (voir [**24**] §8 et §9). Par ailleurs, comme tout cycle attractif attire au moins un point critique de f, l'union des cycles attractifs est contenue dans l'adhérence de l'ensemble postcritique ([**24**], théorème 8.6).

L'ensemble de Fatou de f est le plus grand ouvert de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ sur lequel la famille (f^n) des itérés de f (considérés comme applications holomorphes de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ dans lui-même) forme, localement, une famille normale. Il contient les cycles attractifs. Son complémentaire est l'ensemble de Julia $\mathscr{J}(f)$; il coïncide avec l'adhérence des points périodiques répulsifs de f ([**24**], §14).

On dit que f est *hyperbolique* lorsque les trois conditions équivalentes suivantes sont satisfaites (voir [**23**], théorème 2.2 ; voir aussi [**30**]) :

(i) l'adhérence de l'ensemble postcritique de f est disjointe de l'ensemble de Julia $\mathscr{J}(f)$;
(ii) tous les points critiques de f sont attirés par des cycles attractifs ;
(iii) l'application f est dilatante au voisinage de $\mathscr{J}(f)$, ce qui signifie qu'il existe une métrique conforme ρ définie sur un voisinage de $\mathscr{J}(f)$ telle que $|f'(z)|_\rho > 1$ pour tout point z de $\mathscr{J}(f)$.

L'application f est donc hyperbolique lorsque l'orbite des points critiques (au voisinage desquels f cesse évidemment d'être dilatante) ne se mêle pas à l'ensemble de Julia (là où sont localisés les points répulsifs). La condition (ii) montre que l'hyperbolicité est une condition ouverte ; ainsi, l'ensemble des fractions rationnelles de degré d qui sont hyperboliques forme un ouvert dans l'espace des fractions rationnelles de degré d. La *conjecture d'hyperbolicité* stipule que cet ouvert est dense :

***Conjecture* 1.1.1 (voir [23]).** – Soit d un entier supérieur ou égal à 2. L'ensemble des applications rationnelles qui sont hyperboliques forme un ouvert *dense* dans l'ensemble des applications rationnelles de degré d.

Dans le cas des *polynômes quadratiques*

$$f_c(z) = z^2 + c \tag{1.1.1}$$

une variante de la conjecture affirme que l'ensemble des nombres complexes c tels que le point critique 0 est attiré par un cycle attractif de f_c forme un ouvert dense de la droite complexe $\mathbf{C}$. Puisque tout cycle attractif attire l'unique point critique 0, il revient au même de dire que, pour un ouvert dense de paramètres c, ou bien f_c possède un cycle attractif, ou bien $f_c^n(0)$ tend vers l'infini. Même dans ce cas, la conjecture est encore ouverte à l'heure actuelle.

1.2. Renormalisation. – Soit f_c un polynôme quadratique pour lequel l'ensemble postcritique est borné ; autrement dit, c appartient par définition à l'ensemble de Mandelbrot

$$\mathrm{M} = \{c \in \mathbf{C}\,;\ \text{la suite } (f_c^n(0)) \text{ est bornée}\}$$

(voir **[24]**, appendix G). On dit que l'itéré f_c^n de f_c est *renormalisable* (ou que f_c est renormalisable au temps n) s'il existe deux ouverts U et V contenant l'origine 0, tels que

(a) $f_c^n(U) = V$ et $\overline{U} \subset V$;
(b) l'application $f_c^n : U \to V$ est propre et de degré 2 ;
(c) pour tout entier $k \geq 0$, $f_c^{nk}(0)$ appartient à U.

Autrement dit, l'itéré f_c^n de f_c (qui est un polynôme de degré 2^n) se comporte au voisinage du point critique 0 comme un polynôme de degré 2 dont l'orbite postcritique est bornée. On démontre alors que $f_c^n : U \to V$ est topologiquement conjugué, sur U, à un polynôme quadratique $f_{c'}$ (voir **[15]**). La condition (c) assure que l'orbite du point critique de $f_{c'}$ est à nouveau bornée, donc que $c' \in \mathrm{M}$.

On dit que le polynôme quadratique f_c est *infiniment renormalisable* s'il l'est au temps n pour un ensemble infini d'entiers n. Pour montrer la conjecture d'hyperbolicité, il suffit de montrer que l'ensemble des paramètres c pour lesquels f_c est infiniment renormalisable est d'intérieur vide. Ceci est expliqué, par exemple, dans l'article de synthèse de McMullen **[23]** (voir aussi **[30]**). Les paramètres pour lesquels f_c est renormalisable forment des petites copies de l'ensemble de Mandelbrot à l'intérieur de lui-même. La conjecture d'hyperbolicité pour la famille (f_c) s'avère donc équivalente au fait que toute intersection décroissante de telles copies de M soit d'intérieur vide. Le théorème suivant concerne l'intersection de cet ensemble avec l'axe réel.

***Théorème* 1.2.1 (Lyubich).** – *L'ensemble des valeurs* réelles *du paramètre c tel que l'application $z \mapsto z^2 + c$ soit* infiniment renormalisable *est de mesure de Lebesgue nulle.*

Si la conjecture d'hyperbolicité n'est pas satisfaite, on peut trouver un nombre algébrique c pour lequel f_c est infiniment renormalisable. La conjecture suivante est donc plus forte que la conjecture d'hyperbolicité pour la famille $f_c(z) = z^2 + c$, $c \in \mathbf{C}$.

***Conjecture* 1.2.2.** – Si c est un nombre algébrique, l'application $z \mapsto z^2 + c$ n'est pas infiniment renormalisable.

1.3. Dynamique p-adique. – En vue de comprendre la dynamique de l'application $z \mapsto z^2 + c$ lorsque c est un nombre algébrique, il est naturel de chercher à décrire la restriction de cette dynamique à l'ensemble des nombres complexes z qui sont des nombres algébriques. Nous avons alors à notre disposition diverses topologies sur l'ensemble $\overline{\mathbf{Q}}$ des nombres algébriques. Le premier niveau de cette étude, celui qui est abordé ici, en concerne les aspects p-adiques, ou p est un nombre premier, et plus précisément ceux liés à la dynamique de cette application sur l'ensemble des « nombres complexes p-adiques ». Le deuxième niveau prendrait en compte l'action du groupe de Galois de $\overline{\mathbf{Q}}_p$ sur $\mathbf{Q}_p$[(1)] et le troisième niveau se devrait de mettre ensemble les différentes topologies de $\mathbf{Q}$, c'est-à-dire les informations p-adiques, lorsque p parcourt l'ensemble des nombres premiers, et les informations complexes.

Cet article présente ainsi quelques résultats fondamentaux de dynamique p-adique ; il ne contient quasiment aucune démonstration complète. Le paragraphe 2 introduit la droite projective au sens de Berkovich : il s'agit d'un espace compact connexe métrisable contenant la droite projective « naïve » $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$ comme partie dense et totalement discontinue. Le suivant décrit l'action des fractions rationnelles sur cet espace. Le paragraphe 4 amorce l'étude de la dynamique des transformations rationnelles. Celle-ci est précisée au paragraphe 5 dans le cas des polynômes.

Signalons aussi que ces notes ne présentent qu'un état partiel de la question au moment de la conférence. Nous espérons qu'elles fourniront aide et motivation pour se plonger dans les articles originaux.

Quelques compléments concernant les phénomènes d'équidistribution sont évoqués dans l'article de Chambert-Loir de ce volume. Le lecteur intéressé par les aspects ergodiques pourra également consulter l'article [**18**] de Favre et Rivera-Letelier ; pour des résultats effectifs en degré 2 sur une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, on consultera [**11**]. Signalons aussi l'ouvrage [**3**] consacré à la théorie du potentiel sur la droite projective au sens de Berkovich ; il contient notamment un long chapitre sur la dynamique des applications rationnelles.

Remerciements. — Nous remercions Jean-Yves Briend, Antoine Ducros et Charles Favre pour leurs commentaires et pour avoir mis à notre disposition leurs notes des exposés de Yoccoz, ainsi que le rapporteur pour ses nombreuses remarques qui ont permis d'améliorer ce texte.

2. Espace de Berkovich

Dans cette partie nous présentons une construction « à la Dedekind » de l'espace de Berkovich, aussi appelé espace hyperbolique p-adique. Comme nous le verrons, l'inégalité triangulaire ultramétrique confère à l'espace des boules de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}_p)$ une structure d'arbre réel ; c'est ce qui permet de construire l'espace hyperbolique p-adique. L'approche de Berkovich sera ensuite rapidement résumée.

(1) Pour tout nombre premier p, le groupe des automorphismes de $\mathbf{C}_p$ qui sont continus pour la topologie p-adique coïncide avec le groupe de Galois de $\overline{\mathbf{Q}}_p$ sur $\mathbf{Q}_p$.