PROPRIÉTÉS ERGODIQUES DES APPLICATIONS RATIONNELLES

Vincent Guedj

Panoramas et Synthèses

Numéro 30

2010

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

Panoramas & Synthèses
30, 2010, p. 97–202

PROPRIÉTÉS ERGODIQUES DES APPLICATIONS RATIONNELLES

par

Vincent Guedj

Résumé. – Soit $f : X \to X$ une transformation rationnelle d'une variété projective complexe compacte. Nous étudions la dynamique d'une telle application d'un point de vue statistique, i.e. nous essayons de décrire le comportement asymptotique de l'orbite $O_f(x) = \{f^n(x),\ n \in \mathbb{N} \text{ ou } \mathbb{Z}\}$ d'un point générique. Nous construisons pour ce faire une mesure de probabilité invariante canonique dont nous étudions les principales propriétés ergodiques (mélange, hyperbolicité, entropie), et dont nous montrons — dans certains cas — qu'elle reflète une propriété d'équidistribution des points périodiques.

***Abstract* (Ergodic properties of rational maps).** – Let $f : X \to X$ be a rational transformation of a compact complex projective manifold. We study the dynamics of such a map, from the statistical point of view, i.e. we attempt to describe the asymptotic behavior of the orbit $O_f(x) = \{f^n(x),\ n \in \mathbb{N} \text{ ou } \mathbb{Z}\}$ from a generic point of view. To achieve this, we construct a canonical invariant probability measure, we study its main ergodic properties (mixing, hyperbolicity, entropy) and we show—in some cases—that it reflects an equidistribution property of periodic points.

Préambule

Le texte qui suit porte sur l'étude statistique de la dynamique des transformations méromorphes des variétés kählériennes compactes. Il ne s'agit pas d'un système dynamique (f, X) au sens classique du terme : les transformations f que nous considérons ne sont, en général, pas bien définies sur un sous-ensemble analytique I_f de codimension ≥ 2 – l'ensemble des points d'indétermination. Même lorsque l'on s'intéresse à la dynamique des endomorphismes polynomiaux de $\mathbb{C}^k$, il est important de considérer la compactification du système — extension méromorphe à une compactification de $\mathbb{C}^k$ — qui fait, en général, apparaître des points d'indétermination à l'infini. C'est une source de grande difficulté dans l'analyse de la dynamique : contrôler la dynamique près des points d'indétermination est un enjeu majeur qui nécessite l'utilisation d'outils relativement sophistiqués de Géométrie Algébrique Complexe (problèmes de désingularisation dynamiques) et d'Analyse Complexe (construction et intersection géométrique de courants positifs invariants).

La dynamique des applications de plusieurs variables complexes a connu de nombreux développements au cours des quinze dernières années, suite aux travaux fondateurs de E. Bedford, J. E. Fornaess, J. H. Hubbard, M. Lyubich, N. Sibony et J. Smillie. Ce mémoire se propose de faire le point sur une question particulière, celle de l'existence d'une mesure d'entropie maximale.

Nous renvoyons le lecteur à [**51**], [**135**], [**171**] pour une présentation générale des Sytèmes Dynamiques et de la Théorie Ergodiques, et à [**49**], [**57**], [**111**], [**139, 140**] pour quelques éléments d'Analyse et de Géométrie Algébrique Complexes. On trouvera dans [**26**], [**48**], [**150**] une introduction à la dynamique holomorphe en une variable, et dans [**97**], [**148**], [**153**], [**166**] une introduction à la dynamique holomorphe en plusieurs variables.

Remerciements. – C'est un plaisir de remercier tous ceux qui m'ont aidé durant l'élaboration de ce texte, notamment mes co-auteurs, mes ex-collègues toulousains, les membres de l'A.C.I. « Dynamique des applications polynomiales », sans oublier ma famille. Une mention spéciale pour mes frères spirituels, Charles Favre et Romain Dujardin, ainsi que pour Isabelle et mes parents, à qui je dédie ce travail. Enfin je remercie les rapporteurs de ce texte pour leur lecture attentive et leurs précisions bibliographiques.

Introduction

Soit X une variété complexe kählérienne (connexe) compacte et $f : X \to X$ une transformation méromorphe *dominante* (i.e. dont le jacobien ne s'annule pas identiquement). Nous souhaitons étudier la *dynamique* de l'application f, i.e. décrire statistiquement le comportement des orbites $O_f(x) := \{f^n(x) \,/\, n \in \mathbb{N} \text{ ou } \mathbb{Z}\}$. Il s'agit de répondre aussi bien à des questions (en apparence) élémentaires,

- existe-t-il des points périodiques ? combien ? de quel type ?
- comment se répartissent-ils dans l'espace ?

qu'à des questions plus fines de Théorie Ergodique,

- quelle est la complexité (entropie topologique) du sytème (f, X) ?
- existe-t-il une (unique ?) mesure d'entropie maximale ?
- quelles sont ses propriétés ergodiques (mélange, hyperbolicité,...) ?

Lorsque X est une surface de Riemann, la réponse à ces questions dépend uniquement du degré topologique $\deg(f)$ de l'application f : lorsque $\deg(f) = 1$, la dynamique est pauvre et se calcule à la main. Lorsque $\deg(f) \geq 2$, on a le résultat suivant dû à H. Brolin [**37**] (cas des polynômes) et M. Lyubich [**142**] (voir également [**104**]) :

Théorème A. – *Si* $\dim_{\mathbb{C}} X = 1$ *et* $\deg(f) \geq 2$*, alors il existe une mesure de probabilité invariante canonique* μ_f *qui vérifie*

1. *μ_f est l'unique mesure d'entropie maximale*

$$h_{\text{top}}(f) = h_{\mu_f}(f) = \log \deg(f) > 0;$$

2. *μ_f est mélangeante, d'exposant de Lyapunov*

$$\chi(\mu_f) \geq \frac{1}{2} \log \deg(f) > 0;$$

3. *Il y a $(\deg(f))^n + 1$ points périodiques d'ordre n. Tous –sauf un nombre fini– sont répulsifs et s'équidistribuent selon la mesure μ_f.*

Le but de ce mémoire est d'établir un résultat similaire au Théorème A lorsque X est de dimension $k \geq 2$: on cherche une condition numérique qui garantisse l'existence d'une mesure canonique dynamiquement intéressante.

À la fin du XX^e siècle, E. Bedford, J. E. Fornaess, J. H. Hubbard, M. Lyubich, N. Sibony et J. Smillie ont construit et étudié une telle mesure μ_f pour deux familles particulières (mais décisives) de transformations : les applications de Hénon complexes (i.e. les automorphismes polynomiaux de $\mathbb{C}^2$ d'entropie positive), et les endomorphismes *holomorphes* de l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^k$. Les dynamiques correspondantes sont très différentes : dans le premier cas les points périodiques selles s'équidistribuent selon μ_f, alors que dans le deuxième cas, ce sont les points répulsifs qui jouent un rôle déterminant (un résultat plus récent de J. Y. Briend et J. Duval [**34, 35**]).

Cette différence est en partie expliquée par les valeurs respectives des degrés dynamiques de ces applications.

Degrés dynamiques. – Soit $f : \mathbb{P}^k \to \mathbb{P}^k$ une transformation rationnelle de l'espace projectif complexe $\mathbb{P}^k$. On définit, pour $0 \leq j \leq k$, le $j^{\text{ième}}$ degré dynamique de f,

$$\lambda_j(f) := \liminf_{n \to +\infty} \left[\deg f^{-n} L\right]^{1/n},$$

où L désigne un sous-espace linéaire générique de $\mathbb{P}^k$ de codimension j.

Observons que $\lambda_k(f)$ est le degré topologique de f et que $\lambda_0(f) = 1$. Lorsque f est un endomorphisme *holomorphe*, on vérifie que $\lambda_j(f) = \lambda_1(f)^j$, ainsi $\lambda_k(f)$ est le plus grand degré dynamique de f. À l'inverse, pour une application de Hénon complexe, on a $\lambda_1(f) > \lambda_2(f) = 1$ $(k = 2)$.

Nous rappelons la définition des degrés dynamiques d'une transformation méromorphe $f : X \to X$ d'une variété kählérienne compacte quelconque dans la section 2.1. Ce sont les rapports $\lambda_j(f)/\lambda_{j+1}(f)$ qui jouent un rôle crucial dans les phénomènes d'équidistribution : ceux-ci ont lieu lorsque $\lambda_j/\lambda_{j+1} \neq 1$. On dira que f *est cohomologiquement hyperbolique* lorsque cette condition est satisfaite pour tout $0 \leq j \leq k-1$. Il résulte des propriétés de concavité de la fonction $j \mapsto \log \lambda_j(f)$ (voir Théorème 2.4 de ce texte) que cette condition est équivalente à l'existence d'un entier $l \in [1, k]$ tel que $\lambda_l(f)$ domine strictement tous les autres degrés dynamiques.

En dimension $k = 1$, f est cohomologiquement hyperbolique si et seulement si $\lambda_1(f) > \lambda_0(f) = 1$, i.e. lorsque $\lambda_1(f) = \deg(f) \geq 2$. On retrouve la condition du Théorème A.

En dimension $k = 2$, la condition se résume à $\lambda_1(f) \neq \lambda_2(f)$. Il y a donc deux cas à considérer, selon que $\lambda_1(f) < \lambda_2(f)$ (grand degré topologique, e.g. les endomorphismes holomorphes de $\mathbb{P}^2$), ou $\lambda_1(f) > \lambda_2(f)$ (petit degré topologique, e.g. les applications de Hénon).

Les travaux présentés dans ce mémoire s'articulent autour de la conjecture suivante — formulée dans [**117, 119**] — et y apportent des réponses partielles.

Conjecture. – *Soit X une variété kählérienne compacte et $f : X \to X$ une transformation méromorphe* cohomologiquement hyperbolique*, i.e. telle que $\lambda_l(f) > \max_{j\neq l} \lambda_j(f)$ pour un entier $l \in [1, k]$. Alors il existe une mesure de probabilité invariante canonique μ_f qui ne charge pas les hypersurfaces complexes et vérifie*

1. *μ_f est l'unique mesure d'entropie maximale*
$$h_{\mu_f}(f) = h_{\text{top}}(f) = \log \lambda_l(f).$$
2. *μ_f est mélangeante et hyperbolique. Ses exposants de Lyapunov vérifient*
$$\chi_1 \geq \cdots \geq \chi_l \geq \frac{1}{2} \log\left(\lambda_l(f)/\lambda_{l-1}(f)\right) > 0$$
et
$$0 > -\frac{1}{2} \log\left(\lambda_l(f)/\lambda_{l+1}(f)\right) \geq \chi_{l+1} \geq \ldots \geq \chi_k.$$
3. *Il y a environ $\lambda_l(f)^n$ points périodiques selles de type $(k - l, l)$. Ceux-ci s'équidistribuent selon μ_f.*

Les résultats. – La conjecture est motivée par les travaux de Bedford-Lyubich-Smillie [**16, 17**] qui l'ont établie lorsque f est une application de Hénon complexe, ainsi que par ceux de Fornaess-Sibony [**99, 100, 101**] et Briend-Duval [**34, 35**] qui ont réglé le cas des endomorphismes holomorphes non linéaires de $\mathbb{P}^k$. Nous esquisserons la démonstration de ces résultats ainsi que certaines de leurs généralisations :

Théorème B. – *La conjecture est vraie lorsque $l = k$, i.e. lorsque le degré topologique domine strictement tous les autres degrés dynamiques.*

Ce résultat — qui contient le Théorème A et généralise [**34, 35**] — est expliqué à la section 3 (dans un souci pédagogique, nous détaillons la preuve du Théorème A à la section 1). Notons que ces transformations méromorphes de grand degré topologique sont appelées *cohomologiquement dilatantes* dans le texte de S. Cantat [**46**].