INTRODUCTION

Jean-Louis Colliot-Thélène

Panoramas et Synthèses

Numéro 31 2010

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

Panoramas & Synthèses
31, 2010, p. 1–8

INTRODUCTION

par

Jean-Louis Colliot-Thélène

Le thème commun de ce volume est l'étude des points rationnels des variétés algébriques dont la géométrie est relativement simple, c'est-à-dire qui peuvent prétendre à être des analogues, en dimension supérieure, des courbes de genre zéro, autrement dit des coniques.

Pour ces dernières, rappelons quelques propriétés :

– Toute conique sur un corps fini possède un point rationnel. Pour les corps premiers $\mathbf{F}_p$, ceci est dû à Euler (1754).

– Toute conique sur un corps de fonctions d'une variable sur le corps des complexes a un point rationnel. Ce résultat est dû à Max Noether (1870).

– (Principe de Hasse) Si une conique sur le corps $\mathbf{Q}$ des rationnels possède des points dans tous les complétés de $\mathbf{Q}$, elle possède un point dans $\mathbf{Q}$. Énoncé avec des congruences plutôt que dans le langage de Hensel, ce théorème est dû à Legendre (1785).

– (Approximation faible) Si une conique sur $\mathbf{Q}$ possède un point rationnel, alors pour tout complété de $\mathbf{Q}$ les points à coordonnées dans $\mathbf{Q}$ sont denses dans les points à coordonnées dans le complété, pour la topologie définie par ce complété. Ceci résulte immédiatement du fait qu'une conique avec un point rationnel est isomorphe à la droite projective. De façon plus générale, on peut approximer simultanément en un nombre fini de places de $\mathbf{Q}$.

De façon naïve, on peut envisager plusieurs généralisations en dimension supérieure des coniques, c'est-à-dire des courbes de genre zéro :

(a) Les variétés (géométriquement) unirationnelles, qui après extension finie du corps de base sont birationnelles à un espace projectif.

(b) Les variétés (géométriquement) rationnelles, qui après extension finie du corps de base sont dominées par une variété rationnelle.

***Classification mathématique par sujets* (2010).** – 14M20, 14D05, 12G05.
Mots clefs. – Variétés rationnellement connexes, groupes algébriques semi-simples, torseurs.

(c) Les hypersurfaces dans l'espace projectif $\mathbf{P}^n_k$ sur un corps k définies par une équation homogène disons non singulière $f(x_0, \ldots, x_n) = 0$ de degré $d \leq n$.

Points rationnels sur quel corps de base k ? De tout temps on s'est intéressé au corps $\mathbf{Q}$ des rationnels, et plus généralement aux corps de nombres. Sur de tels corps, on dispose malheureusement encore de très peu de résultats généraux. De façon un peu grossière, disons que, sur de tels corps, on a de très bons résultats pour :

(1) Les espaces homogènes de groupes algébriques linéaires connexes (cohomologie galoisienne).

(2) Les hypersurfaces $f(x_0, \ldots, x_n) = 0$ avec n grand par rapport à d (méthode du cercle).

Citons des problèmes étudiés pour ces types de variétés : le principe de Hasse (l'existence de solutions dans tous les complétés de k implique-t-elle l'existence de solutions dans k ?), la densité des solutions pour la topologie de Zariski, l'approximation faible (les solutions globales sont-elles denses dans les solutions locales ?).

Avant de s'attaquer aux corps de nombres, ou même aux corps de fonctions d'une variable sur un corps fini, on doit déjà considérer la situation sur un corps fini, et sur un corps de fonctions d'une variable sur un corps algébriquement clos. Il y a dans cette direction des théorèmes classiques :

Théorème de Tsen (1933) : Sur un corps de fonctions d'une variable sur un corps algébriquement clos, toute forme homogène $f(x_0, \ldots, x_n)$ en $n+1 > d$ variables a un zéro non trivial.

Théorème de Chevalley-Warning (1935) : Sur un corps fini, toute forme homogène $f(x_0, \ldots, x_n)$ en $n+1 > d$ variables a un zéro non trivial.

On sait aussi que les espaces homogènes de groupes algébriques linéaires connexes sur un corps fini ou sur un corps de fonctions d'une variable sur un corps algébriquement clos, ont un point rationnel. Le premier énoncé est dû à Lang. Le second, en caractéristique zéro, est dû à Springer (1962). Ces deux énoncés furent généralisés par Steinberg, qui démontra (1965) la Conjecture I de Serre [**13**, 1962] : sur tout corps parfait de dimension cohomologique 1, tout espace (principal) homogène d'un groupe linéaire connexe possède un point rationnel.

Existe-t-il une classe naturelle de variétés algébriques qui sur un corps fini ont automatiquement des points rationnels ?

Existe-t-il une classe naturelle de variétés algébriques qui sur un corps de fonctions d'une variable sur un corps algébriquement clos ont automatiquement des points rationnels ?

Par exemple, dans son exposé [**15**] au congrès international d'Amsterdam en 1954, A. Weil montra (avec une méthode cohomologique uniforme) que toute surface géométriquement rationnelle sur un corps fini possède un point rationnel.

Dans un cadre purement géométrique, c'est-à-dire sur un corps de base algébriquement clos, la question : *En dimension supérieure, sur un corps de base algébriquement clos, quelles sont les généralisations des coniques, c'est-à-dire des courbes de genre* *zéro* est aussi apparue naturellement dans l'étude de la classification (birationnelle) des variétés de dimension supérieure, en dimension 2 chez l'école italienne il y a plus d'un siècle, et en dimension plus grande à partir des années 1980.

En dimension 2, toute surface unirationelle est rationnelle (Castelnuovo), et toute surface quadrique ou cubique lisse est rationnelle.

C'est au début des années 1990 qu'une réponse satisfaisante a été donnée en dimension quelconque. La bonne classe est celle des variétés rationnellement connexes, dont les propriétés principales ont été dégagées par Kollár, Miyaoka et Mori [**12**] et qui sont aussi apparues dans les travaux de F. Campana [**2**].

Ce sont les variétés telles que deux points généraux sont reliés par une courbe de genre zéro. Cette hypothèse couvre les trois types de variétés (a), (b) et (c) envisagées naïvement. C'est clair pour (a) et (b), pour (c) on a le théorème de Campana et de Kollár, Miyaoka et Mori : les variétés de Fano sur les complexes sont rationnellement connexes.

Il y a en fait plusieurs définitions des variétés (projectives, lisses) rationnellement connexes : celle donnée ci-dessus, la connexité rationnelle par chaînes (deux points sont reliés par un nombre fini de courbes de genre zéro) et la connexité rationnelle séparable, qu'on peut caractériser de façon a priori très différente : on demande l'existence d'un morphisme $\mathbf{P}^1 \to X$ tel que l'image réciproque du faisceau tangent sur X soit somme directe de $\mathcal{O}(a_i)$ *avec tous les* $a_i > 0$. Sur un corps non dénombrable de caractéristique zéro, ces trois propriétés sont équivalentes. La démonstration de ce résultat utilise les propriétés des schémas Hom, et des techniques de déformation. On renvoie ici aux lecteurs aux textes de synthèse [**1, 3, 10**].

Il devint alors intéressant de voir ce que l'on peut dire de l'arithmétique des variétés rationnellement connexes. Quels énoncés connus ou conjecturés pour les surfaces (géométriquement) rationnelles valent pour toutes les variétés rationnellement connexes ?

Les premiers résultats généraux furent obtenus par Kollár, qui étudia pour ces variétés la R-équivalence sur les points rationnels de ces variétés lorsque le corps de base est local (p-adique ou réel)(1999), puis lorsque le corps de base est fini (2004). La R-équivalence est une version sur un corps k quelconque de la rationalité connexe par chaînes sur un corps algébriquement clos : c'est la relation d'équivalence sur les points k-rationnels d'une k-variété projective engendrée par la relation élémentaire : être dans l'image des points k-rationnels d'une droite $\mathbf{P}^1_k$ par un k-morphisme $\mathbf{P}^1_k \to X$.

Revenons aux deux problèmes arithmétiques posés ci-dessus. En 2003, des énoncés que l'on peut considérer comme les meilleures extensions possibles du théorème de Tsen d'une part, du théorème de Chevalley-Warning d'autre part, furent établis.

En 2003, Graber, Harris et Starr [**5**] montrèrent que *toute variété rationnellement connexe définie sur un corps de fonctions d'une variable sur les complexes* a un point rationnel. D'un point de vue géométrique, cela dit que toute famille à un paramètre de telles variétés admet une section. Ils montrèrent ensuite, dans un article avec B. Mazur, que la classe des variétés rationnellement connexes est la classe la plus large pour laquelle on peut espérer un tel théorème. Ainsi certaines surfaces d'Enriques sur un corps de fonctions d'une variable n'ont pas de point rationnel.

On trouvera dans le présent volume diverses applications du résultat et des méthodes de Graber, Harris et Starr. Le travail lui-même et l'article subséquent de de Jong et Starr [**8**] ont fait l'objet de compte-rendus détaillés ([**3, 14**]).

En 2003 également, H. Esnault [**4**] montra que *toute variété rationnellement connexe définie sur un corps fini possède un point rationnel.* Elle montra cela pour une classe plus large de variétés. Cette classe contient en particulier les surfaces d'Enriques. La technique employée est la cohomologie ℓ-adique (ou p-adique), elle repose sur un théorème d'intégralité de valeurs propres de Frobenius établi par Deligne dans SGA7.

Le travail de Graber, Harris et Starr introduisait une nouvelle idée dans les méthodes de déformation. Cette idée fut exploitée dans d'autres contextes par Kollár [**11**] et par Hassett et Tschinkel (étude de l'approximation faible pour les variétés rationnellement connexes sur un corps de fonctions d'une variable sur les complexes, [**6**, 2006]).

Les corps finis et les corps de fonctions d'une variable sur les complexes partagent une propriété : ils sont de dimension cohomologique 1. En dimension cohomologique 2, on trouve plusieurs types de corps intéressants : les corps de nombres totalement imaginaires, les corps p-adiques, les corps de fonctions d'une variable sur un corps fini, les corps de fonctions de deux variables sur un corps algébriquement clos. Quand une propriété de géométrie arithmétique a été établie pour l'un des ces corps, il est tentant de voir si elle vaut aussi pour les autres corps. On a par exemple les propriétés bien connues suivantes :

– (Lang 1952) Toute forme homogène de degré d en $n+1 \geq d^2$ variables sur un corps de fonctions de deux variables sur $\mathbf{C}$, ou sur un corps de fonctions d'une variable sur un corps fini, a un zéro non trivial.

– (Brauer, Hasse, Noether 1931) Pour une algèbre à division sur un corps local, ou sur un corps de nombres, l'indice (racine carrée de la dimension) est égal à l'exposant (ordre de la classe de l'algèbre dans le groupe de Brauer).

– (Kneser 1965, Bruhat-Tits 1967) Sur un corps p-adique, tout espace principal homogène sous un groupe semisimple simplement connexe possède un point rationnel.

– (Kneser et Harder 1965, Chernousov 1990) Sur un corps de nombres totalement imaginaire, ou sur un corps de fonctions d'une variable sur un corps fini, tout espace principal homogène sous un groupe semisimple simplement connexe possède un point rationnel.

Serre a demandé si ces deux derniers énoncés sont des cas particuliers d'un résultat valable pour tous les corps de dimension cohomologique 2 (c'est la « Conjecture II » de Serre, [**13**, 1962]).

Ces énoncés, et la comparaison avec ce qui a été rappelé plus haut, ont amené entre autres B. Mazur à se demander s'il existe une classe de variétés « rationnellement