LA CONNEXITÉ RATIONNELLE EN ARITHMÉTIQUE

Olivier Wittenberg

Panoramas et Synthèses

Numéro 31

2010

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

Panoramas & Synthèses
31, 2010, p. 61–114

LA CONNEXITÉ RATIONNELLE EN ARITHMÉTIQUE

par

Olivier Wittenberg

Résumé. – Nous discutons dans ces notes l'arithmétique des variétés rationnellement connexes. Des preuves détaillées de théorèmes de Kollár, de Kollár et Szabó et d'Esnault concernant les variétés rationnellement connexes sur les corps finis ou locaux y sont données.

***Abstract* (Rational connectedness in arithmetic).** – These expository notes discuss the arithmetic of rationally connected varieties. Detailed proofs of theorems of Kollár, of Kollár and Szabó and of Esnault about rationally connected varieties over finite fields and local fields are given.

Une variété algébrique propre et lisse X sur un corps k de caractéristique 0 est dite *rationnellement connexe* si pour toute extension algébriquement close K de k, par tout couple de K-points de X passe une courbe rationnelle (définie sur K). Cette notion, introduite au début des années 1990 par Kollár, Miyaoka et Mori, et indépendamment par Campana, a d'abord joué un rôle important dans l'étude de la géométrie des variétés complexes. Le développement des techniques géométriques propres aux variétés rationnellement connexes s'est ensuite répercuté en arithmétique. Ainsi l'article fondateur de Kollár [**69**] établissait-il, pour toutes les variétés rationnellement connexes définies sur un corps p-adique, la finitude de la R-équivalence — une propriété de nature arithmétique qui jusque-là n'était connue que dans des cas très particuliers et qui n'avait même pu être envisagée dans cette généralité, faute de disposer de la notion de connexité rationnelle. Depuis une dizaine d'années, plusieurs autres résultats concernant l'arithmétique des variétés rationnellement connexes ont vu le jour. C'est sur ces résultats que nous nous proposons de faire le point dans le présent rapport.

Le premier chapitre introduit brièvement les principales questions qui se posent dans l'étude de l'arithmétique des variétés rationnellement connexes. Dans chacun des chapitres suivants, un théorème général est discuté et démontré. Le corps de base est un corps p-adique (ou fertile) au second chapitre, un corps pseudo-algébriquement

***Classification mathématique par sujets* (2010).** – 11G25, 14M22, 14G05, 14C15.
Mots clefs. – Variété rationnellement connexe, corps (C_i), R-équivalence, zéro-cycles.

clos (puis fini ou p-adique) au troisième chapitre, un corps fini au quatrième chapitre. On ne connaît à ce jour aucun résultat qui s'applique à toutes les variétés rationnellement connexes définies sur $\mathbf{Q}$, exception faite du corollaire 3.7 ci-dessous. Les corps de nombres ne joueront donc qu'un rôle mineur dans ce rapport. Il existe toutefois une abondante littérature consacrée à l'arithmétique de diverses classes de variétés rationnellement connexes sur les corps de nombres : surfaces rationnelles, espaces homogènes de groupes linéaires, intersections d'hypersurfaces de bas degré dans l'espace projectif, fibrations en des variétés de l'un de ces trois types. Nous ne tenterons pas de la survoler ici.

Les chapitres 2 et 3 font appel à des techniques de déformation de courbes rationnelles. Leur lecture présuppose un minimum de familiarité avec la plus simple d'entre elles dans le cas où le corps de base est algébriquement clos, telle qu'elle est présentée dans [**15**, §4].

Remerciements. – Ces notes ont constitué le support d'une série de cinq exposés à la session SMF États de la Recherche « Variétés rationnellement connexes : aspects géométriques et arithmétiques » tenue à Strasbourg en mai 2008, dont je remercie les organisateurs. Je tiens d'autre part à remercier Antoine Chambert-Loir, Jean-Louis Colliot-Thélène, Olivier Debarre, Hélène Esnault, Bruno Kahn et János Kollár pour leurs réponses à mes questions, pour leurs remarques et pour de nombreuses discussions éclairantes, et enfin le rapporteur pour sa lecture vigilante.

Conventions. – Une *variété* est un schéma de type fini sur un corps. Soit X une variété sur un corps k. Un *point rationnel* de X est un k-point de X. L'ensemble des points rationnels est noté $X(k)$. Soit K un corps algébriquement clos non dénombrable contenant k. On dit que la variété X est *rationnelle* (resp. *unirationnelle*) si $X \otimes_k K$ l'est, c'est-à-dire si $X \otimes_k K$ est birationnellement équivalente à un espace projectif (resp. s'il existe une application rationnelle dominante d'un espace projectif vers $X \otimes_k K$). Si X est propre sur k, on dit que X est *rationnellement connexe* (resp. *rationnellement connexe par chaînes*, *séparablement rationnellement connexe*) si $X \otimes_k K$ l'est, c'est-à-dire si $X \otimes_k K$ vérifie les définitions données dans [**15**] ou dans [**68**]. Nous convenons que les qualificatifs *rationnelle*, *unirationnelle*, *rationnellement connexe* et *séparablement rationnellement connexe* sous-entendent que $X \otimes_k K$ est irréductible (en particulier non vide). On dira que X est *k-rationnelle* (resp. *k-unirationnelle*) s'il existe une application rationnelle $\mathbf{P}^n_k \dashrightarrow X$ qui soit birationnelle (resp. dominante). Une *conique* (ou *conique projective*) est une courbe projective plane de degré 2 ; rappelons que toute courbe rationnelle propre et lisse est isomorphe à une conique.

1. Un aperçu de quelques problèmes concernant l'arithmétique des variétés rationnellement connexes

1.1. Corps (C_i). – Le paragraphe 1.1 est consacré aux corps (C_i) ; les variétés rationnellement connexes n'y apparaissent qu'implicitement, sous la forme d'hypersurfaces projectives de bas degré ou d'intersections d'icelles. La propriété (C_1), introduite par Artin [**4**], est notamment liée aux questions d'existence de points rationnels sur les variétés de Severi-Brauer ainsi que sur certaines variétés de Fano. (Les unes comme les autres sont des exemples de variétés rationnellement connexes (par chaînes), d'après les travaux de Campana, Kollár, Miyaoka et Mori.)

1.1.1. *Définition, exemples et théorèmes de transition*

Définition 1.1 **(Artin, Lang)**. – *Soient k un corps et $i \geqslant 0$ un entier. On dit que k est* un corps (C_i) *si pour tout n et tout d, toute hypersurface de $\mathbf{P}^n_k$ de degré d avec $n \geqslant d^i$ admet un point k-rationnel.*

Autrement dit, le corps k est (C_i) si les équations de la forme

$$f(x_0, \ldots, x_n) = 0,$$

où $f \in k[x_0, \ldots, x_n]$ est un polynôme homogène de degré $d > 0$, admettent une solution $(x_0, \ldots, x_n) \in k^{n+1} \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ dès que $n \geqslant d^i$.

Les corps (C_0) sont les corps algébriquement clos. Chevalley [**19**] a démontré que les corps finis sont (C_1) :

Théorème 1.2 **(Chevalley-Warning)**. – *Soit k un corps fini de caractéristique p. Soit $H \subset \mathbf{P}^n_k$ une hypersurface de degré d avec $n \geqslant d$. Alors* $\operatorname{Card} H(k) \equiv 1 \pmod p$*, et en particulier $H(k) \neq \varnothing$.*

Démonstration (due à Ax). – Notons q le cardinal de k et $f \in k[x_0, \ldots, x_n]$ un polynôme homogène de degré d s'annulant sur H. Soit N le nombre de solutions dans k^{n+1} de l'équation $f = 0$. Comme $\operatorname{Card} H(k) = (N-1)/(q-1)$, il suffit d'établir la congruence $N \equiv 0 \pmod p$.

Posons $F = 1 - f^{q-1}$. Le polynôme F ne prend sur k^{n+1} que les valeurs 0 et 1 ; il vaut 1 précisément sur les solutions de l'équation $f = 0$. D'où l'égalité

$$N = \sum_{\underline{x} \in k^{n+1}} F(\underline{x}). \tag{1.1.1}$$

Pour tout entier α tel que $0 \leqslant \alpha < q-1$, on a $\sum_{x \in k} x^\alpha = 0$ (si $\alpha = 0$ c'est clair, sinon c'est un petit exercice). Par conséquent, pour $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbf{N}$, on a

$$\sum_{(x_0, \ldots, x_n) \in k^{n+1}} x_0^{\alpha_0} \ldots x_n^{\alpha_n} = 0$$

dès que $\min(\alpha_i) < q-1$, en particulier dès que $\alpha_0 + \cdots + \alpha_n < (n+1)(q-1)$. Il s'ensuit que $\sum_{\underline{x} \in k^{n+1}} G(\underline{x}) = 0$ pour tout $G \in k[x_0, \ldots, x_n]$ de degré strictement inférieur à $(n+1)(q-1)$. Appliquons cela au polynôme F, qui est de degré $d(q-1)$, et combinons l'égalité obtenue avec (1.1.1) : on trouve que N s'annule dans k, autrement dit $N \equiv 0 \pmod p$. $\square$

Remarques. – (i) L'hypothèse que le polynôme f est homogène n'a pas été utilisée, ainsi le résultat prouvé est quelque peu plus général que celui énoncé.

(ii) Toujours sous les hypothèses du théorème de Chevalley-Warning, Ax [**5**] a démontré que l'on a même $\operatorname{Card} H(k) \equiv 1 \pmod q$, où q désigne le cardinal de k.

À partir des corps algébriquement clos et des corps finis, il est facile de fabriquer des exemples de corps (C_i) pour $i > 1$ grâce à la propriété de transitivité suivante :

***Théorème 1.3* (Tsen-Lang-Nagata).** – *Soit k'/k une extension de corps de degré de transcendance $d < \infty$, et soit i un entier naturel. Si k est un corps (C_i), alors k' est un corps (C_{i+d}).*

En particulier, le corps $\mathbf{C}(t)$, et plus généralement le corps des fonctions d'une courbe sur un corps algébriquement clos, est (C_1) (c'est le théorème de Tsen), et le corps des fonctions de toute variété algébrique intègre de dimension i sur un corps algébriquement clos (resp. fini) est un exemple de corps (C_i) (resp. (C_{i+1}), d'après le théorème de Chevalley).

Démonstration. – Nous nous contentons ici de démontrer le cas particulier le plus important du théorème 1.3, c'est-à-dire celui où $k' = k(t)$ et où k est algébriquement clos. Pour le cas général, le principe est le même, mais il vaut mieux commencer par établir le théorème d'Artin-Lang-Nagata dont il est question au §1.1.4 ci-dessous. Nous renvoyons à [**48**, Chapter 3] pour une démonstration complète.

Soient donc k un corps algébriquement clos et $f \in k(t)[x_0, \ldots, x_n]$ un polynôme homogène de degré $d \leqslant n$ à coefficients dans $k(t)$. Nous voulons prouver que l'équation $f = 0$ admet une solution dans $k(t)^{n+1} \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$. Écrivons f comme

$$f = \sum_{\underline{\alpha}=(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)\in\mathbf{N}^{n+1}} c_{\underline{\alpha}} x_0^{\alpha_0} \ldots x_n^{\alpha_n} \tag{1.1.2}$$

avec $c_{\underline{\alpha}} \in k(t)$. Quitte à multiplier f par un scalaire, on peut supposer que les $c_{\underline{\alpha}}$ sont dans $k[t]$. Soit N un entier assez grand, à préciser. Posons

$$x_i = y_{i0} + t y_{i1} + \cdots + t^N y_{iN}$$

pour chaque $i \in \{0, \ldots, n\}$, où les y_{ij} sont des indéterminées. Réécrivons (1.1.2) en termes des y_{ij}, développons, et rassemblons les monômes obtenus selon les puissances de t ; on aboutit à $f = \sum_{m\geqslant 0} t^m \varphi_m$ où les φ_m sont des polynômes en les y_{ij} et à coefficients dans k. Notant δ le maximum des degrés des polynômes $c_{\underline{\alpha}}$, on a $\varphi_m = 0$ pour $m > Nd + \delta$. Le système $\varphi_0 = \varphi_1 = \cdots = \varphi_{Nd+\delta} = 0$ est un système de $Nd + \delta + 1$ équations polynomiales homogènes en $(N+1)(n+1)$ variables, les y_{ij}. Comme $d < n + 1$, ce système admettra une solution dans $k^{(N+1)(n+1)} \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ si l'on choisit N assez grand, puisque k est algébriquement clos. Une telle solution est précisément ce que l'on cherche. □