VARIÉTÉS RATIONNELLEMENT CONNEXES SUR UN CORPS ALGÉBRIQUEMENT CLOS

Laurent Bonavero

Panoramas et Synthèses

Numéro 31

2010

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

Panoramas & Synthèses
31, 2010, p. 9–60

VARIÉTÉS RATIONNELLEMENT CONNEXES SUR UN CORPS ALGÉBRIQUEMENT CLOS

par

Laurent Bonavero

Résumé. – Ce sont les notes d'un mini-cours sur les variétés rationnellement connexes, écrit pour les Etats de la Recherche de la Société Mathématique de France (Strasbourg, 2008).

On met l'accent sur les aspects géométriques. Ces notes sont aussi une invitation à lire le livre d'Olivier Debarre [**15**], dont une grande partie de ce cours est extraite. Ces notes doivent surtout permettre au lecteur de comprendre l'énoncé suivant :

Sur un corps algébriquement clos, soient X une variété projective lisse et $\varphi : X \to C$ un morphisme surjectif sur une courbe projective lisse C. Si la fibre générale de φ est séparablement rationnellement connexe, alors φ possède une section.

Ainsi que l'un de ses fameux corollaires [**20**] :

Sur un corps algébriquement clos de caractéristique zéro, soit $f : X \to Y$ un morphisme dominant entre deux variétés projectives. Si Y et la fibre générale de f sont rationnellement connexes, alors X est rationnellement connexe.

Ce cours est rédigé dans l'espoir de s'adresser à un public large, à l'exception peut-être du §7, écrit en collaboration avec Stéphane Druel, où nous donnons les détails de la preuve de la conjecture de connexité rationnelle de Shokurov par Hacon et M^c^Kernan, plus technique et où les prérequis sont un peu plus importants.

Abstract **(Rationally connected varieties on an algebraically closed field).** – These are lectures notes on rationally connected varieties, written for the "Etats de la Recherche" of the French Mathematical Society held in Strasbourg (May 2008). We focus on geometric aspects. These lectures notes are also an invitation to read Debarre's book [**15**], which was a great source of inspiration. These lectures notes should provide for the reader all the necessary material to understand the following statement :

Let X be a projective manifold defined over an algebraically closed field and let $\varphi : X \to C$ be a surjective morphism over a smooth projective curve C. If the general fiber of φ is separably rationally connected, then φ has a section.

Together with one of its famous consequences [**20**]:

Classification mathématique par sujets **(2010).** – 14E05, 14E30, 14J40, 14J45.
Mots clefs. – Courbes rationnelles, variétés rationnellement connexes.

Je remercie tous les participants pour leurs commentaires qui ont permis d'améliorer grandement ce texte par rapport à la version distribuée le jour de la conférence. Stéphane Druel à Grenoble m'a apporté une aide inestimable lors de la préparation de ce cours.

Let $f : X \to Y$ a dominant map between two projective varieties over an algebraically closed field of characteristic zero. If both Y and the general fiber of f are rationally connected, then X is rationally connected.

These notes have been written in order that a wide audience can easily read them, except maybe the last section, written in collaboration with Stéphane Druel, a bit more technical, where we give the detailed proof of Shokurov's rational connectedness conjecture following Hacon and M[c]Kernan.

LECTURE I
COURS 1

Ce premier cours est un survol sur l'importance et la présence des courbes rationnelles en géométrie algébrique. On traite le cas particulier des hypersurfaces de l'espace projectif et on discute le lien entre courbes rationnelles et géométrie birationnelle classique (éclatements, lieux exceptionnel et d'indétermination) ou moderne (théorie de Mori). On introduit enfin la notion de connexité rationnelle et des notions qui lui sont reliées.

Introduction

Sauf mention explicite du contraire, toutes les variétés algébriques et les morphismes considérés sont définis *sur un corps k algébriquement clos de caractéristique arbitraire*, les variétés sont irréductibles et réduites. Certains énoncés ne sont valables qu'en caractéristique 0 (ceux dont la preuve nécessite le théorème de lissité générique ou ceux pour lesquels il faut utiliser une résolution des singularités) ou sur un corps non dénombrable (ceux pour lesquels il est important de savoir qu'une variété n'est pas réunion dénombrable de sous-variétés propres), on le mentionnera explicitement.

Une courbe est une variété projective intègre (irréductible et réduite) de dimension 1.

Si X est une variété (quasi-) projective, on dira qu'un point est en position générale, ou plus simplement général, s'il appartient à un ouvert non vide (non spécifié) de X, qu'il est en position très générale, ou plus simplement très général, s'il appartient au complémentaire d'une réunion dénombrable de fermés stricts de X. Cette dernière notion n'est que très peu pertinente sur un corps dénombrable où le complémentaire d'une réunion dénombrable de fermés stricts de X peut être vide.

1. Quelques exemples de variétés possédant des courbes rationnelles

1.1. Généralités. – Il y a trois grandes classes de courbes projectives lisses : la droite projective $\mathbb{P}^1$ (dont la topologie complexe est celle d'une sphère), les courbes elliptiques (dont la topologie complexe est celle d'un tore), les courbes de genre ≥ 2 (dont la topologie complexe est celle d'une bouée multi-places). Il y a énormément d'invariants ou outils permettant de distinguer ces trois classes, celui qui nous sera le plus utile sera le signe du fibré canonique : si X est une variété projective lisse de dimension n, on note classiquement $K_X := -\det T_X$[(1)]. C'est le fibré en droites dont les sections locales sont les n-formes régulières $f(z_1, \ldots, z_n)dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$. Pour une courbe lisse C, on a $K_C = T_C^*$ et les propriétés suivantes sont satisfaites : $-K_{\mathbb{P}^1}$ est ample, K_E est trivial si E est une courbe elliptique et K_C est ample si C est de genre ≥ 2.

Le problème suivant est un problème classique en géométrie algébrique : si $X \subset \mathbb{P}^N$ est une variété projective, existe-t-il une courbe dans X de degré donné et de genre donné ? Si oui, en existe-t-il beaucoup et que peut-on dire du lieu dans X couvert par ces courbes ? Une situation élémentaire où l'on peut énoncer une réponse complète est le cas des courbes planes : si $C \subset \mathbb{P}^2$ est une courbe lisse plane de genre g et de degré d, alors $g = (d-1)(d-2)/2$. Si $C \subset \mathbb{P}^2$ est une courbe de degré d (ceci signifie que C intersecte une droite générale de $\mathbb{P}^2$ en d points), alors le genre g de sa désingularisée vérifie $g \leq (d-1)(d-2)/2$. En particulier, si $C \subset \mathbb{P}^2$ est isomorphe à $\mathbb{P}^1$, alors C est une droite ou une conique dans $\mathbb{P}^2$ et si $f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$ est un morphisme dont l'image $f(\mathbb{P}^1)$ est de degré ≥ 3, alors $f(\mathbb{P}^1)$ est nécessairement singulière.

Définition 1. – *Soit X une variété projective. Une courbe rationnelle sur X est un morphisme $f : \mathbb{P}^1 \to X$ non constant*[(2)]. *Le degré d'une courbe rationnelle $f : \mathbb{P}^1 \to X$ est le degré du morphisme f.*

Le lecteur débutant doit commencer par se convaincre qu'il n'y a pas de morphisme $f : \mathbb{P}^1 \to C$ non constant si C est une courbe de genre ≥ 1.[(3)]

1.2. Courbes rationnelles contenues dans les hypersurfaces de $\mathbb{P}^n$. – Les courbes rationnelles les plus simples dans l'espace projectif sont les droites. On se demande ici si une hypersurface (générale) de degré d dans $\mathbb{P}^n$ contient (au moins) une droite.

La variété des droites dans $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$ (où V est un espace vectoriel de dimension $n+1$[(4)]) est la grassmannienne $G(2, n+1)$ de dimension $2n-2$. Il y a sur $G(2, n+1)$

---

(1) On ne distinguera pas entre notation additive et multiplicative pour le groupe de Picard. Ici, K_X est le dual du fibré $\det T_X$.

(2) Il pourra arriver que par abus de langage (ou par inattention), on parle aussi de courbes rationnelles pour désigner l'image d'un morphisme non constant $f : \mathbb{P}^1 \to X$.

(3) Dans sa thèse **[37]**, R. Lazarsfeld montre le très joli résultat suivant : si X est une variété projective complexe lisse de dimension n et si $f : \mathbb{P}^n \to X$ est un morphisme surjectif, alors $X \simeq \mathbb{P}^n$. La preuve utilise de façon essentielle la géométrie des courbes rationnelles de X. Hwang et Mok ont depuis étendu ce résultat à de nombreuses variétés de Fano avec nombre de Picard égal à 1.

(4) Dans tout ce cours, nous suivons la convention naïve : $\mathbb{P}(V)$ désigne la variété des droites vectorielles de V.

un sous-fibré tautologique E de rang 2 du fibré trivial $G(2,n+1)\times V$ (la fibre $E_{[l]}$ de E au dessus de $[l]\in G(2,n+1)$ est le sous-espace vectoriel de V de dimension 2 défini par la droite $l\subset \mathbb{P}(V)$). Une hypersurface X_d de degré d dans $\mathbb{P}(V)$ est donnée par son équation, à savoir un polynôme homogène de degré d, autrement dit un élément s de $S^d(V^*)$. L'hypersurface X_d contient la droite l si et seulement si $s_{|E_{[l]}}$ est nul. La sous-variété $F_{X_d}(1,n,d)$ de $G(2,n+1)$ des droites contenues dans X_d est donc le lieu des zéros de s vue comme section du fibré $S^d(E^*)$ sur $G(2,n+1)$. Il est alors bien connu (en caractéristique zéro seulement) que pour s générale, $\dim F_{X_d}(1,n,d) = \dim G(2,n+1) - \operatorname{rg} S^d(E^*)$ si cette quantité est positive ou nulle, et que $F_{X_d}(1,n,d)$ est vide sinon. Comme $\operatorname{rg} S^d(E^*) = d+1$, on en déduit l'énoncé suivant.

Proposition 2. – *En caractéristique nulle*[(5)]*, une hypersurface générale de degré d dans $\mathbb{P}^n$ contient une infinité de droites si $d<2n-3$, un nombre fini de droites si $d=2n-3$ et ne contient pas de droites si $d>2n-3$.*

Le lecteur intéressé consultera **[18]** pour en savoir beaucoup plus sur la variété des r-plans contenus dans une intersection complète. Il y trouvera aussi des valeurs numériques du nombre de droites contenues dans une hypersurface générale de degré $2n-3$ dans $\mathbb{P}^n$, dont le célèbre et classique : il y a 27 droites sur une cubique lisse de $\mathbb{P}^3$.

Dans le cas où $d<2n-3$, il est possible de préciser un peu le lieu de X_d couvert par les droites contenues dans X_d. Soit en effet $Z\subset X_d\times F_{X_d}(1,n,d)$ la variété d'incidence suivante :

$$Z := \{(x,[l])\in X_d\times F_{X_d}(1,n,d)\mid x\in l\}.$$

Les fibres de la deuxième projection $Z\to F_{X_d}$ étant de dimension 1, on a $\dim Z = 2n-2-d$. Soit $V=p_1(Z)\subset X_d$ l'image de Z dans X_d par la première projection : c'est le lieu de X_d couvert par les droites contenues dans X_d. Si $d\geq n$, on déduit de ce qui précède que V est une sous-variété stricte de X_d, on montre aussi aisément[(6)] que si $d\leq n-1$, alors $V=X_d$, autrement dit X_d est couverte par des droites. Finalement, dans le cas $d=n$, des arguments analogues permettent de montrer que X_n est couverte par des coniques[(7)].

---

(5) Cet énoncé est en fait encore vrai en caractéristique positive.

(6) Si s est un polynôme homogène de degré d définissant X_d et si $x=[1:0:\cdots:0]\in X_d$, alors la droite passant par x et un point $[0:x_1:\cdots:x_n]$ est contenue dans X_d si et seulement si $s(t,x_1,\ldots,x_n)=0$ pour tout t. Comme $t\mapsto s(t,x_1,\ldots,x_n)$ est un polynôme en t de degré $\leq d-1$, ce polynôme est nul si et seulement si ses d coefficients sont nuls, ce qui consiste à résoudre d équations homogènes de degrés respectifs $1,2,\ldots,d$ en les variables $[x_1:\cdots:x_n]$. Il y a au moins une solution si $d\leq n-1$. Dans le cas $d=n-1$, on remarque qu'il y en a $(n-1)!$, autrement dit par un point général de $X_{n-1}\subset\mathbb{P}^n$ passent $(n-1)!$ droites. Cette observation élémentaire a inspiré un très joli résultat dû à J.M. Landsberg **[36]**.

(7) *Merci à Laurent Manivel à qui je dois les références m'ayant permis d'écrire cette « footnote », en réponse à une question de Jean-Louis Colliot-Thélène.*
Par un point général de $X_n\subset\mathbb{P}^n$ passent un nombre fini de coniques. Il n'y a pas, à ma connaissance, de méthodes élémentaires pour déterminer ce nombre en dimension quelconque. La formule