INTRODUCTION

Stéphane Jaffard

Panoramas et Synthèses

Numéro 32

2010

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

Panoramas & Synthèses
32, 2010, p. 1–55

INTRODUCTION

par

Stéphane Jaffard

Résumé. – Ce texte propose une introduction à des concepts clefs couramment utilisés en analyse fractale, et tout particulièrement dans les deux contributions de cet ouvrage. La première partie est une mise en perspective historique montrant comment ces notions sont intervenues et ont interagi. Dans la deuxième partie, différentes définitions de dimensions fractionnaires sont introduites (boîte, Hausdorff, packing) et les outils pertinents de théorie de la mesure sont rappelés; leur utilisation est mise en évidence sur des exemples simples (Cantor, ...). Après avoir introduit la notion de régularité ponctuelle, le texte se concentre ensuite sur les fonctions et mesures multifractales; le but est alors de déterminer les dimensions des ensembles de points ayant un exposant de régularité donnée. Puis on fournit quelques éléments concernant le formalisme multifractal, qui permet de relier ces dimensions à des quantités globales effectivement calculables sur des données expérimentales. La troisième partie apporte un éclairage spécifique sur une notion récente qui occupe une place maintenant centrale en analyse multifractale : les systèmes d'ubiquité. Il s'agit de déterminer les dimensions des ensembles approximant à une certaine vitesse une famille de points « bien répartis », qui peut être de nature arbitraire (probabiliste ou arithmétique par exemple).

***Abstract* (Introduction).** – This text introduces key concepts currently used in fractal analysis, and in particular in the two contributions of this book. The first part gives an historical account of how these notions came into play, and interacted. In the second part, different definitions of fractional dimensions are introduced (box, Hausdorff, packing), and the corresponding mesure theoretical tools are recalled. Simple examples illustrate their use (Cantor sets, ...). After introducing the notion of pointwise smoothness, the text then focuses on multifractal measures and functions: The goal is to determine the dimensions of the sets of points where a given regularity exponent occurs. A few elements about the multifractal formalism are supplied: It allows to relate these dimensions with global quantities, effectively computable on real-life data. The third part sheds a specific light on a recent notion which now occupies a central place in multifractal analysis: Ubiquity systems. The purpose is to determine the dimensions of the sets approximating at a certain rate a family of

***Classification mathématique par sujets* (2010).** – 11J83, 11K06, 26A15, 26A30, 28A78, 28A80.
Mots clefs. – Fractals, dimension de Hausdorff, dimension de boîte, dimension de packing, régularité ponctuelle, fonction multifractale, mesure multifractale, ubiquité, approximation diophantienne, formalisme multifractal.

"well spread" points, which may be of arbitrary origin (probabilistic or arithmetic, for instance).

Le point de départ de ce volume a été un colloque tenu à Monastir, en Tunisie, autour de la géométrie fractale, et centré sur ses interactions avec l'analyse et les probabilités. En plus des sujets traités dans cet ouvrage, deux thèmes particulièrement bien représentés concernaient le rôle des fractals dans l'étude des systèmes dynamiques, et l'analyse multifractale de fonctions. Dans cette préface, nous allons présenter, dans une perspective historique, quelques techniques utilisées en analyse fractale et qui sont pertinentes dans les deux contributions de ce volume. Les sujets de celles-ci, à savoir les propriétés des mesures obtenues par des constructions multiplicatives, et l'étude de modèles de fragmentation, se situent au confluent entre analyse mathématique, théorie des probabilités et géométrie fractale. Le but est alors non pas d'étudier directement des ensembles fractals particuliers, mais plutôt des objets mathématiques provenant de l'analyse et des probabilités (fonctions, mesures, processus, arbres...) et qui présentent un certain nombre de caractéristiques fractales. Nous ferons une présentation historique des riches interactions entre analyse, probabilités et géométrie fractale, en montrant comment et pour quelles raisons les outils mathématiques qui sont au cœur de l'analyse fractale ont été introduits et se sont avérés pertinents pour fournir de nouvelles motivations à l'étude de fonctions ou de mesures, déterministes ou stochastiques. Ces dernières peuvent être très particulières, initialement introduites comme exemples ou contre-exemples, ou au contraire avoir été conduites à jouer un rôle central dans certaines branches des mathématiques. L'exemple du mouvement brownien est particulièrement emblématique de cette seconde catégorie : il est en effet lié de multiples façons à l'analyse fractale : il est autosimilaire en loi, on peut déterminer les différentes dimensions fractionnaires de son graphe, les points exceptionnels où son module de continuité est plus grand ou moins grand que le module en presque tout point (points « lents » ou « rapides ») forment des familles d'ensembles fractals, l'ensemble des points où il s'annule est aussi un fractal, et cet ensemble porte une mesure naturelle qui est elle-même « multifractale » (c'est-à-dire que les points où cette mesure a une régularité donnée forment également des familles de fractals), la frontière extérieure du brownien bidimensionnel est fractale, et fait encore aujourd'hui l'objet d'intenses recherches. Enfin, le mouvement brownien permet de construire des mesures fractales : les *mesures harmoniques.*

Nous venons de mentionner, à propos du mouvement brownien, quelques liens entre fractals et mesures. Nous verrons que ces liens sont multiples et profonds : une méthode classique pour minorer la dimension de Hausdorff d'un ensemble consiste à « étaler » de la façon la plus homogène possible une mesure portée par l'ensemble (cf. le principe de distribution de masse, énoncé dans le lemme 1). Réciproquement de nombreux ensembles fractals peuvent être définis à partir d'une mesure. Il peut s'agir du support de cette mesure, mais aussi de la famille d'ensembles considérés lors de son analyse multifractale. Mentionnons à ce propos que l'analyse multifractale est l'un des thèmes communs aux deux textes de cet ouvrage. C'est par ailleurs, depuis plus de quinze ans, l'un des sujets qui se développe le plus activement à l'interface entre la géométrie fractale, l'analyse et les probabilités. Aussi, nous étudierons en détail une classe générale d'ensembles qui interviennent naturellement en analyse multifractale (tant dans des cadres déterministes qu'aléatoires) : les *systèmes d'ubiquité*. En effet de nombreux résultats récents sont basés sur des extensions du résultat de base de minoration de la dimension de Hausdorff des systèmes d'ubiquité que nous exposerons (travaux de Julien Barral, Arnaud Durand, Stéphane Seuret...). Nous terminerons cette préface par l'étude d'une famille particulièrement simple de fonctions multifractales.

0.1. Aperçu historique. – Rappelons tout d'abord le contexte dans lequel les différents outils mathématiques utilisés pour l'analyse des fractals sont apparus, et pour quelles raisons des « objets fractals » de natures très différentes ont été introduits. On peut distinguer trois périodes dans l'évolution de ce domaine :

La « préhistoire » correspond au XIX^{e} siècle et s'achève quand les différentes notions de dimensions fractionnaires sont définies. Durant cette première période, certains objets sont introduits, dont la nature fractale ne se révèlera que beaucoup plus tard. Les années entre 1810 et 1880 sont celles où se construisent les outils de base de l'analyse (notion de continuité, intégrale de Riemann...), et les objets fractals qui apparaissent dans ce contexte sont le plus souvent liés à des exemples ou contre-exemples de fonctions ayant des propriétés particulières. Bien sûr, à cette époque, aucune des notions permettant d'étudier des caractéristiques fractales n'a été introduite (autosimilarité, dimension fractionnaire...) ; ce n'est que plus tard, quand les définitions correspondantes auront été précisées, que ces exemples seront revisités, et leurs propriétés fractales mises en évidence. Il est d'autant plus remarquable — et intriguant — qu'un si grand nombre d'exemples de fractals aient été introduits à cette époque, en dehors de toute considération sur la géométrie fractale.

Un tournant apparait avec l'introduction des différentes notions de dimension au début du XX^{e} siècle. Souhaitant approfondir la notion de longueur d'une courbe, suite aux travaux de Camille Jordan, Hermann Minkowski, en 1901, prend comme point de départ un ε-voisinage de la « courbe » A étudiée : en reprenant le vocabulaire imagé introduit par Benoît Mandelbrot, il considére la *saucisse de Minkowski*

$$A_\varepsilon = \{x : \mathrm{dist}(x, A) \le \varepsilon\};$$

et étudie le comportement du volume $\mathrm{Vol}(A_\varepsilon)$ (appelé *contenu de Minkowski*) quand ε tend vers 0 ; ceci lui permet de définir la notion de longueur d'une courbe, en dehors de toute notion de différentiabilité. A partir de 1925, Georges Bouligand reprendra cette idée en l'étendant à des ensembles quelconques, cf. [**12**] : on cherche à mettre en évidence une loi de puissance dans le comportement de $\mathrm{Vol}(A_\varepsilon)$ quand ε tend vers 0.

Définition 1. – *Soit A un ensemble borné de $\mathbb{R}^d$. Si la quantité*

$$\frac{\log(\mathrm{Vol}(A_\varepsilon))}{\log(\varepsilon)}$$

a une limite quand ε tend vers 0, on dit que cette limite est la dimension de Minkowski-Bouligand de A (ou encore dimension de boite de A). Quand elle ne possède que des limites supérieures et inférieures, on définit ainsi respectivement les dimensions supérieure ou inférieure de boite ; on a donc

$$(1) \qquad \overline{\dim}_b(A) = \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\log(\mathrm{Vol}(A_\varepsilon))}{\log(\varepsilon)} \qquad \text{et} \qquad \underline{\dim}_b(A) = \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{\log(\mathrm{Vol}(A_\varepsilon))}{\log(\varepsilon)}.$$

Une idée qui jouera un rôle fondamental apparait ici : les quantités pertinentes en analyse fractale se caractérisent par des comportements en lois de puissance sur un grand nombre d'échelles. L'étude qualitative des fractals dans les domaines d'application est essentiellement basée sur cette propriété. On dispose ainsi d'outils de classification qui peuvent (en particulier) être utilisés pour sélectionner ou réfuter des modèles, ou encore pour « caler » leurs paramètres.

En 1919, donc un peu avant les travaux de Bouligand, Felix Hausdorff introduit dans **[27]** la dimension qui porte désormais son nom (cf. la définition 9 et la proposition 2) ; notons que la troisième notion de dimension qui joue aujourd'hui un rôle importante, à savoir la dimension de packing, ne sera dégagée qu'en 1982, par Claude Tricot, (cf. la definition 13). Il est naturel que ces deux premières notions aient été introduites au début du XX$^{\text{e}}$ siècle, à une époque où les propriétés « fines » des ensembles commencent à être étudiées pour elles-mêmes et pour leurs applications en analyse (cardinalité des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ dans le cas de l'ensemble triadique de Cantor, par exemple) ; c'est aussi l'époque où la notion de mesure d'un ensemble (nécessaire pour définir la dimension de Hausdorff) est dégagée et étudiée. Les différentes variantes de la dimension fractionnaire vont alors jouer un rôle fédérateur, et fournir un outil qui, dès lors, va être appliqué à l'étude d'ensembles issus de domaines des mathématiques très différents. Ceci reste vrai aujourd'hui et, pour le mathématicien, une définition « opérationelle » d'un ensemble fractal pourrait être « un ensemble dont il est intéressant de déterminer la dimension ». Nous verrons dans la partie 2 que ce point de vue conduit à qualifier de fractals des ensembles qui ne sont plus du tout susceptibles de représentation graphique. Un autre « ingrédient » souvent présent en géométrie fractale est la notion d'autosimilarité ; elle ne peut être réduite à une définition aussi précise que celle de la dimension de Hausdorff, ou de boite et, suivant les contextes, elle apparait sous de légères variantes : L'idée de base est que l'objet étudié peut être décomposé en plusieurs parties « semblables au tout », le terme « semblable » pouvant être pris sous plusieurs acceptations : il peut s'agir d'une autosimilarité stricte, dont l'exemple le plus simple est fourni par l'ensemble triadique de Cantor (cf. la définition 4), la courbe de Van Koch, ou le triangle de Sierpinski ; dans ce cas, on parle plutôt d'IFS (« iterated function systems »), étudiés par John Hutchinson, et popularisés par le célèbre livre de Michael Barnsley **[3]**. L'autosimilarité peut être approximative, comme pour les fonctions de Weierstrass, cf. (4), les ensembles de Julia, ou de Mandelbrot (sur lesquels nous reviendrons) ; ou encore « en loi » pour des objets de nature aléatoire, comme les trajectoires du mouvement brownien, les processus de Lévy stables ou ceux intervenant en fragmentation. On notera que, à