

# QUELQUES ASPECTS FRACTALS DES FRAGMENTATIONS ALÉATOIRES

Julien Berestycki & Jean Bertoin & Bénédicte Haas & Grégory Miermont



Panoramas et Synthèses

Numéro 32

2010

**SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE**  
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

## QUELQUES ASPECTS FRACTALS DES FRAGMENTATIONS ALÉATOIRES

*par*

Julien Berestycki, Jean Bertoin, Bénédicte Haas & Grégory Miermont

---

**Résumé.** – Nous nous intéressons à l'évolution d'objets qui se désagrègent de façon aléatoire au cours du temps, et pour lesquels les différents fragments évoluent indépendamment les uns des autres. Nous supposons également une propriété naturelle d'auto-similarité statistique qui confère à ces processus une structure de fractale aléatoire. L'objet de cette partie est d'en décrire certains aspects.

Dans une première section, nous présenterons les fondements de la théorie des fragmentations, et en particulier, nous verrons que la loi de tels processus est caractérisée par un indice d'auto-similarité, une mesure de dislocation et un coefficient d'érosion. L'étude de l'évolution d'un fragment marqué de façon aléatoire est un des aspects essentiels de cette théorie.

Dans la deuxième section, nous introduirons un arbre aléatoire muni d'une distance qui permet de décrire la généalogie du processus. Nous nous intéresserons à la dimension fractale de l'ensemble de ses feuilles, et à la régularité hölderienne du profil des hauteurs.

Enfin, dans une dernière section, nous nous pencherons sur la vitesse à laquelle décroît le fragment contenant un point donné. Nous verrons qu'à des points distincts peuvent correspondre des vitesses différentes. Ceci nous conduira naturellement à étudier le spectre multifractal des vitesses de fragmentation.

**Abstract (Some fractal aspects of random fragmentations).** – We consider objects that are undergoing random dislocations along time, in such a way that different fragments evolve independently. We will also make a natural self-similarity assumption, which induces a random fractal structure on these objects.

In a first section, we will present the basics of fragmentation theory. In particular, we will see that the distributions of such processes are characterized by a self-similarity index, a dislocation measure and an erosion coefficient. A detailed study of the evolution of a randomly tagged fragment is one of the most important aspects of this theory.

---

**Classification mathématique par sujets (2010).** – 60J80, 60G18.

**Mots clefs.** – Fragmentation aléatoire, processus de branchement, chaîne de Markov, cascade multiplicative, arbres aléatoires, dimension de Hausdorff, spectre multifractal.

Ce travail a été réalisé dans le cadre du projet de l'ANR SPINADA.

In the second section, we will introduce a random tree endowed with a distance, that allows to describe the genealogy of the process. We will focus on the fractal dimension of the set of its leaves, and on the Hölder regularity of the height profile.

Finally, in the third section we will consider the speed of decay of the fragment containing a given point. We will see that two different points may give rise to two different speeds. This will naturally lead us to the study of the multifractal spectrum of fragmentation speeds.

## 1. Préliminaires sur les processus de fragmentation

**1.1. Quelques notations et définitions.** – Un processus de fragmentation décrit l'évolution d'un objet de masse totale égale à 1 qui se désagrège au cours du temps. On s'intéresse uniquement aux masses des fragments, et pas, par exemple, aux formes ou aux positions spatiales. On représentera donc l'état de la fragmentation par une partition de masse, c'est-à-dire une suite décroissante  $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots)$  de réels positifs ou nuls et de somme totale  $\sum_{n=1}^{\infty} s_n \leq 1$ . Ainsi le  $n$ -ème terme  $s_n$  correspond à la masse du  $n$ -ème plus gros fragment. Notons que l'on n'impose pas l'égalité  $\sum_{n=1}^{\infty} s_n = 1$  afin de pouvoir prendre en compte les situations dans lesquelles une partie de l'objet a été réduite en poussière, c'est-à-dire en particules infinitésimales, chacune étant de masse nulle. On notera  $s_0 = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} s_n$  la masse de poussière d'une partition de masse  $\mathbf{s}$ , et on dira que  $\mathbf{s}$  est propre si elle n'a pas de poussière, c'est-à-dire si  $s_0 = 0$ . Enfin, on désignera par

$$\mathcal{P}_m := \left\{ \mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots) : s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{\infty} s_i \leq 1 \right\}$$

l'espace des partitions de masse. On munit  $\mathcal{P}_m$  de la distance uniforme

$$d(\mathbf{s}, \mathbf{s}') := \max_{i \in \mathbb{N}} |s_i - s'_i|,$$

qui en fait un espace métrique compact.

Considérons maintenant un processus aléatoire markovien

$$X(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots), \quad t \geq 0$$

à valeurs dans l'espace des partitions de masse  $\mathcal{P}_m$ . On supposera que le processus  $X = (X(t), t \geq 0)$  a des trajectoires continues à droite et pourvues de limite à gauche (en abrégé, càdlàg); c'est-à-dire que presque-sûrement, l'application  $t \rightarrow X(t)$  de  $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{P}_m$  est continue à droite et admet une limite à gauche notée  $X(t-)$  en tout temps  $t > 0$ . Pour tout  $0 \leq r \leq 1$ , on note  $\mathbb{P}_r$  la loi du processus  $X$  lorsque l'état initial est donné par  $X(0) = (r, 0, \dots)$ , c'est-à-dire lorsqu'au temps initial il n'y a qu'un seul fragment de masse  $r$ .

**Définition 1.** – Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On dit que  $X$  est une fragmentation auto-similaire d'indice  $\alpha$  si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

(i) Pour tout  $r \in ]0, 1]$ , sous la mesure de probabilités  $\mathbb{P}_1$ , le processus changé d'échelle

$$rX(r^\alpha t), \quad t \geq 0$$

a pour loi  $\mathbb{P}_r$ .

(ii) Pour toute partition de masse  $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots)$ , considérons une suite de processus indépendants  $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots$  de lois respectives  $\mathbb{P}_{s_1}, \mathbb{P}_{s_2}, \dots$ . Notons encore  $\tilde{X}(t)$  la partition de masse aléatoire obtenue par le réarrangement décroissant des termes des partitions de masse  $X^{(1)}(t), X^{(2)}(t), \dots$ . Alors le processus  $\tilde{X}$  est une version du processus  $X$  issu de la partition de masse  $\mathbf{s}$ .

La première partie de la définition 1 énonce une propriété d'auto-similarité qui permet de décrire l'évolution en loi de la fragmentation d'une masse  $r$  en fonction de celle d'une masse unité. La seconde est une propriété de type branchement : des fragments distincts évoluent indépendamment les uns des autres. Ces deux conditions nous permettent de nous concentrer pour la suite sur la situation où le processus part de l'état  $\mathbf{1} = (1, 0, \dots)$ , c'est-à-dire lorsqu'au temps initial on a un unique fragment de masse 1. Désormais, nous travaillerons implicitement sous la loi  $\mathbb{P} := \mathbb{P}_1$ .

Il est intuitivement évident que l'indice  $\alpha$  joue un rôle crucial dans l'évolution d'une fragmentation auto-similaire. En effet, puisque la masse de chaque fragment diminue au cours du temps, les taux de dislocation des fragments croissent (respectivement, décroissent) avec le temps lorsque  $\alpha < 0$  (respectivement, lorsque  $\alpha > 0$ ). Pour  $\alpha = 0$ , les taux de dislocation ne dépendent pas de la masse des fragments ; on dit que la fragmentation est *homogène*.

Il est parfois commode d'utiliser l'intervalle  $]0, 1[$  et ses ouverts pour représenter les partitions de masses et les fragmentations. Plus précisément, désignons par  $\mathcal{O}$  l'ensemble des ouverts  $O$  de  $]0, 1[$ . On définit la distance entre deux ouverts  $O$  et  $O'$  comme la distance de Hausdorff entre les fermés  $F = [0, 1] \setminus O$  et  $F' = [0, 1] \setminus O'$  ; ainsi  $\mathcal{O}$  devient un espace compact. Tout ouvert  $O \in \mathcal{O}$  admet une décomposition canonique en intervalles ouverts deux à deux disjoints, et on peut associer à  $O$  la partition de masse  $|O|^\downarrow$  obtenue comme la suite des longueurs des intervalles qui composent  $O$ , ordonnée de façon décroissante. Notons que dans cette situation, la masse totale de la poussière correspond à la mesure de Lebesgue du complémentaire  $F = [0, 1] \setminus O$ . L'application continue  $O \rightarrow |O|^\downarrow$  n'est bien sûr pas injective, car il existe en général de nombreuses manières de représenter une partition de masse par un ouvert (de façon informelle, choisir une telle représentation revient à ordonner de gauche à droite les fragments d'une partition de masse).

On peut toujours représenter une fragmentation auto-similaire  $X$  à valeurs dans  $\mathcal{P}_m$  comme une fragmentation de l'intervalle  $]0, 1[$ , c'est-à-dire comme l'image par l'application  $O \rightarrow |O|^\downarrow$  d'un processus de Markov  $\Theta = (\Theta(t), t \geq 0)$  à valeurs dans l'espace  $\mathcal{O}$  des ouverts de  $]0, 1[$ , qui a des trajectoires càdlàg et vérifie les deux propriétés suivantes.

Notons tout d'abord  $\mathbf{P}_O$  la loi du processus  $\Theta$  issu d'un ouvert arbitraire  $O \in \mathcal{O}$ . Pour tout intervalle  $]a, b[ \in \mathcal{O}$ , désignons par  $g_{]a, b[} : ]0, 1[ \rightarrow ]a, b[$  l'homéomorphisme canonique donné par  $g_{]a, b[}(x) = a + (b - a)x$ . Alors  $\mathbf{P}_{]a, b[}$  coïncide avec la loi sous  $\mathbf{P}_{]0, 1[}$  du processus image  $(g_{]a, b[}(\Theta(|b - a|^\alpha t)), t \geq 0)$  par l'homéomorphisme canonique  $g_{]a, b[}$ . Cette condition est le pendant de la propriété d'auto-similarité (i) de la définition 1. Ensuite, pour tout ouvert  $O$  dont la représentation canonique en intervalles ouverts deux à deux disjoints est, disons,  $O = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ , considérons des versions indépendantes  $\Theta^{(1)} = (\Theta^{(1)}(t), t \geq 0)$ ,  $\Theta^{(2)} = (\Theta^{(2)}(t), t \geq 0)$ , ..., de lois respectives  $\mathbf{P}_{I_1}, \mathbf{P}_{I_2}, \dots$ . Observons que par construction, pour tout  $t \geq 0$ , les ouverts aléatoires  $\Theta^{(1)}(t), \Theta^{(2)}(t), \dots$  sont deux à deux disjoints, et posons  $\tilde{\Theta}(t) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Theta^{(n)}(t)$ . Alors le processus  $\tilde{\Theta} = (\tilde{\Theta}(t), t \geq 0)$  a pour loi  $\mathbf{P}_O$ ; c'est le pendant de la propriété de branchement (ii) de la définition 1. On remarquera que la famille d'ouverts aléatoires  $(\Theta(t), t \geq 0)$  est alors emboîtée, dans le sens où  $\Theta(t') \subseteq \Theta(t)$  pour  $t \leq t'$ .

Nous renvoyons à [6] et [10] pour les détails de la construction d'une telle représentation de  $X$  par une fragmentation d'intervalle (qui, bien sûr, n'est pas unique en général).

**1.2. Mesure de dislocation.** – De façon informelle, on caractérise souvent la distribution d'un processus aléatoire en décrivant son évolution sur un intervalle de temps infinitésimal. C'est le cas notamment des diffusions qui sont obtenues comme solution d'une équation différentielle stochastique, et, plus généralement, des processus markoviens dont la distribution est déterminée analytiquement par un générateur infinitésimal. De ce point de vue, l'objet fondamental pour l'étude des fragmentations est la notion de mesure de dislocation, qui, comme son nom l'indique, permet de décrire la loi des dislocations soudaines.

Afin de mieux comprendre comment cette notion intervient, nous allons tout d'abord nous pencher sur le cas plus simple où chaque fragment reste stable pendant un temps non nul. Nous présenterons ensuite de manière succincte le cas des dislocations instantanées.

Commençons par rappeler que, par hypothèse, nous travaillons sous la loi  $\mathbb{P}$  pour laquelle  $X(0) = \mathbf{1} = (1, 0, \dots)$ , c'est-à-dire qu'au temps initial, il y a un seul fragment de masse 1. Introduisons

$$D := \inf\{t \geq 0 : X(t) \neq \mathbf{1}\},$$

le premier temps de dislocation du processus. Une conséquence élémentaire de la propriété de Markov est l'alternative suivante : soit  $D = 0$  p.s. (on dit alors que la dislocation est immédiate), soit  $D > 0$  p.s.

1.2.1. *Chaînes de fragmentation et représentation généalogique.* – Plaçons nous ici dans cas  $D > 0$  p.s., et excluons implicitement la situation triviale où  $D = \infty$  p.s. On dira que  $X$  est une *chaîne de fragmentation* pour souligner le caractère discret de l'ensemble des temps en lesquels surviennent les dislocations.