MESURES ENGENDRÉES PAR MULTIPLICATIONS

Julien Barral & Ai Hua Fan & Jacques Peyrière

Panoramas et Synthèses

Numéro 32

2010

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

Panoramas & Synthèses
32, 2010, p. 57–189

MESURES ENGENDRÉES PAR MULTIPLICATIONS

par

Julien Barral, Ai Hua Fan & Jacques Peyrière

Résumé. – Ce texte est conscré aux propriétés géométriques fines d'exemples fondamentaux de mesures obtenues comme limites de processus multiplicatifs: produits de Riesz, mesures de Gibbs, mesures auto-similaires, et chaos multiplicatifs. On commence par expliquer comment obtenir de tels objets et quelles sont leurs propriétés essentielles. Puis les notions de dimensions d'une mesure et d'analyse multifractale sont présentées dans un cadre général avant d'être illustrées sur les exemples de mesures précédents. Enfin, on montre combien ces mesures sont des outils puissants dans la description de la percolation sur les arbres, et de certains recouvrements dynamiques ou aléatoires.

***Abstract* (Measures generated by multiplication).** – This text explores the fine geometric properties of classes of measures stemming from multiplicative processes: Riesz products, Gibbs measures, self-similar measures, and multiplicative chaos. First these objects are constructed and their fundamentals given. Then the notions of dimensions of measures and multifractal analysis are introduced in a general setting and illustrated with the above examples. Finally, these measures are shown to be powerful tools to describe and study percolation on trees and random or dynamics-related coverings.

1. Introduction

Les produits infinis de fonctions peuvent engendrer des objets très variés lorsqu'ils ne convergent pas vers une fonction. Ainsi, pour étudier l'algèbre des mesures sur un groupe abélien localement compact, et en particulier établir son asymétrie, Hewitt et Zuckerman **[113]** ont été amenés à considérer des *produits de Riesz* de la forme $\prod_{j\geq 1}(1+\operatorname{Re} a_j\gamma_j)$, où les a_j sont des nombres complexes tels que $|a_j| \leq 1$ et les γ_j

***Classification mathématique par sujets* (2010).** – 28A78, 28A80, 37B40, 43A25.
Mots clefs. – Dimension de Hausdorff, mesures, produits de Riesz, systèmes dynamiques, chaos multiplicatif, martingales, recouvrements.

sont des caractères d'un groupe abélien compact vérifiant certaines conditions d'indépendance. De tels produits convergent rarement ponctuellement ou même presque partout par rapport à la mesure de Haar. En revanche, ils convergent faiblement vers une mesure positive.

Des produits infinis de fonctions aléatoires ont été considérés par Novikov et Stewart [**172**] et par Yaglom [**213**] dans un cadre restreint, puis les cascades multiplicatives ont été introduites dans leur forme conservative et sur une grille régulière dans [**212**] et sous forme de martingales par B. Mandelbrot [**157, 158, 160, 161**] pour décrire la turbulence et, plus généralement, les phénomènes intermittents (tels la répartition des minéraux rares dans l'écorce terrestre). Là encore, la convergence ponctuelle de ces produits n'a pas de sens et l'objet limite est une mesure aléatoire. Ces cascades sont susceptibles de beaucoup de généralisations, qui ne seront pas toutes ici abordées pour rester dans le cadre d'un article visant un public assez large. Il est à noter que les cascades multiplicatives et les processus de fragmentation présentent quelque parenté.

Mentionnons aussi que les recouvrements aléatoires et la percolation sur les arbres relèvent de cette problématique : il s'agit en effet de produits infinis de fonctions indicatrices aléatoires [**66, 68**].

L'étude des cascades multiplicatives [**132, 159, 160, 161**] a conduit au concept de *multifractal*. Ce concept, au début [**107, 110**] assez vague de « mélange d'ensembles de dimensions différentes » portant chacun une singularité höldérienne a connu différentes étapes de formalisation dans les années 80 ([**47, 109**]) puis dans les années 90 ([**38, 119, 177**]). Il se trouve que cette genèse des multifractals s'est faite indépendamment du procédé de Ruelle, basé sur la thermodynamique, de calcul de dimension de Hausdorff, alors qu'ils ont une parenté certaine. De nos jours l'analyse multifractale est un ensemble d'outils qui s'appliquent à de nombreuses situations, notamment en théorie ergodique. Au début c'était un moyen d'analyse de la régularité locale des mesures et des fonctions, mais on s'est assez vite aperçu que c'était un concept d'analyse qui permet, étant donné un espace métrique (E,d) et une collection de propriétés $\{P_\alpha\}_{\alpha\in A}$ telles que les ensembles $E_\alpha = \{t \in E : t \text{ vérifie } P_\alpha\}$ soient disjoints, de comparer la taille de ces ensembles à l'aide de leurs dimensions fractales. Ainsi peut-on dire aussi que l'on fait de l'analyse multifractale en théorie de l'ubiquité, quand par exemple on calcule les dimensions de Hausdorff des nombres irrationnels approchés à une vitesse donnée par les nombres rationnels ([**42, 52, 108, 120, 122**]), ou quand on étudie les ensembles de points où la loi du logarithme itéré est violée pour le mouvement brownien [**179**] : $E_\alpha = \left\{t \in [0,1] : \limsup_{h\to 0} \frac{B_{t+h}-B_t}{\sqrt{2h\log\log h^{-1}}} = \alpha\right\}$, $\alpha > 1$.

Dans ce texte, nous abordons produits de Riesz, mesures de Gibbs, cascades de Mandelbrot et certaines de leurs généralisations comme objets d'étude et aussi outils naturels d'analyse, une place importante étant consacrée à leur analyse multifractale et ses applications.

Le chapitre 2 présente quelques propriétés des produits de Riesz. Le chapitre 3 introduit et dégage quelques propriétés fondamentales d'une large classe de fonctions positives définies sur l'ensemble des cylindres d'un espace symbolique sur un alphabet fini. Cette classe de fonctions, dites « presque multiplicatives », contient les mesures de Gibbs du formalisme thermodynamique, mais aussi d'autres exemples qui apparaissent naturellement dans l'étude des projections de ces mesures sur des ensembles auto-similaires ou auto-affines. Le chapitre 4 introduit la notion de T-martingale (ou chaos multiplicatif), qui est l'objet abstrait introduit par J.-P. Kahane afin de formaliser les modèles de turbulence de B. Mandelbrot. On dégage les principaux résultats de convergence connus pour ces objets, ainsi que des propriétés de finitude des moments de leur masse totale ; ces résultats ne seront démontrés que dans le cas particulier, mais fondamental, des cascades canoniques de Mandelbrot. Enfin, on montre comment résoudre une question de convergence de séries de Fourier lacunaires déterministes à l'aide de produits de Riesz aléatoires vus comme T-martingales.

Les chapitres 2 à 4 sont indépendants, mais nous verrons que les trois familles de mesures qui y sont construites ne sont pas sans intersection. Ces mesures sont en général singulières par rapport à la mesure de Lebesgue. Quand elles possèdent des propriétés d'invariance d'échelle, il devient possible de décrire précisément leur distribution aux petites échelles, en étudiant dans un premier temps leur dimension, puis leur analyse multifractale. Elles peuvent également être utilisées pour mettre en évidence les propriétés fines d'objets qui leurs sont intimement liés. Le chapitre 5 introduit et explore la notion de dimension d'une mesure, et le chapitre 6 développe un formalisme multifractal très général. Ces deux chapitres sont ensuite utilisés dans la description des propriétés multifractales des mesures presque multiplicatives dans le chapitre 7, et des cascades de Mandelbrot sur un espace symbolique dans le chapitre 8. Le chapitre 7 aborde aussi l'analyse multifractale des réalisations géométriques des mesures de Gibbs sur des ensembles auto-similaires ou auto-affines, tandis que le chapitre 8 propose plusieurs applications de l'analyse multifractale des cascades de Mandelbrot à la description d'autres objets naturels. Le chapitre 9 est consacré à des applications fondamentales de l'étude des mesures de type T-martingales ou Gibbs dans la résolution de problèmes de percolation et de recouvrement.

2. Produits de Riesz

Nous commençons en décrivant une classe de mesures engendrées par multiplication, certainement la première à avoir été considérée, qui émane naturellement de l'analyse de Fourier. Il s'agit des produits de Riesz. Nous nous plaçons d'abord dans le cadre général des groupes abéliens compacts, puis nous examinons trois exemples concrets de tels groupes.

Deux questions seront particulièrement discutées, l'une est la convergence presque partout d'une série trigonométrique lacunaire par rapport à un produit de Riesz et l'autre est celle de l'absolue continuité d'un produit de Riesz par rapport à un autre. A travers les produits de Riesz on abordera aussi la notion de quasi bernoullicité qui jouera un rôle important dans l'analyse multifractale des mesures presque multiplicatives.

2.1. Des mesures produits aux produits de Riesz. – Les mesures de Bernoulli sont certainement les plus simples parmi les mesures engendrées par multiplication. Ces mesures sont bien étudiées en probabilité comme modèle probabiliste classique. Soit $m \geq 2$ un entier. Soit $\mathbf{p} = (p_0, p_1, \ldots, p_{m-1})$ un vecteur de probabilité, i.e. $p_j \geq 0$ et $\sum_{j=0}^{m-1} p_j = 1$. Sur l'espace produit $\Sigma_m^+ = \{0, 1, \ldots, m-1\}^{\mathbb{N}}$, le vecteur de probabilité $\mathbf{p}$ définit une mesure de probabilité $\mu_{\mathbf{p}}$, dite mesure produit infini de Bernoulli, de la façon suivante

$$\mu_{\mathbf{p}}([x_0, x_1, \ldots, x_n]) = p_{x_0} p_{x_1} \cdots p_{x_n}$$

où $[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ désigne le cylindre constitué des points $y \in \Sigma_m^+$ tels que $y_j = x_j$ pour $0 \leq j \leq n$. En vertu du théorème d'extension de Carathéodory, $\mu_{\mathbf{p}}$ s'étend d'une façon unique à la tribu borélienne. Il est à rappeler que les variables X_n $(n \geq 0)$ définies sur Σ_m^+ par $X_n(x) = x_n$ sont indépendantes et identiquement distribuées, ayant $(p_0, p_1, \ldots, p_{m-1})$ comme la loi de probabilité commune.

Voici une généralisation. Soit $(\Omega_n, \mathscr{A}_n, \mu_n)$ $(n \geq 0)$ une suite d'espaces de probabilité. Sur l'espace produit mesurable $(\Omega, \mathscr{A})$ où $\Omega = \prod_{n=0}^{\infty} \Omega_n$ et $\mathscr{A} = \bigotimes_{n=0}^{\infty} \mathscr{A}_n$, on peut définir une mesure, produit infini de mesures μ, de la façon suivante

$$\mu(A_0 \times A_1 \times \cdots \times A_n \times \Omega_{n+1} \times \cdots) = \mu_0(A_0)\mu_1(A_1) \cdots \mu_n(A_n)$$

pour $A_j \in \mathscr{A}_j$ $(0 \leq j \leq n)$. Ainsi on obtient un bon modèle de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ sur lequel les variables aléatoires X_n $(n \geq 0)$ définies par $X_n(\omega) = \omega_n$ sont indépendantes, ayant μ_n comme lois de probabilité.

On se donne pour tout $n \geq 0$ une autre mesure de probabilité ν_n sur $(\Omega_n, \mathscr{A}_n)$. On désigne par ν la mesure produit infini définie par $(\nu_n)_{n \geq 0}$. Supposons que pour tout $n \geq 0$, ν_n soit absolument continue par rapport à μ_n (ce fait est noté $\nu_n \ll \mu_n$). Sous quelle condition, a-t-on $\nu \ll \mu$? Kakutani **[133]** avait posé cette question et montré la dichotomie suivante : ou bien ν est absolument continue par rapport à μ, ou bien ν est singulière par rapport à μ, i.e. ν et μ sont portées par deux ensembles disjoints (ce fait est noté $\nu \perp \mu$).

Théorème 2.1 **([133])**. – *Sous les hypothèses ci-dessus, on a $\nu \ll \mu$ ou $\nu \perp \mu$ selon que le produit infini suivant converge ou diverge*

$$\prod_{n=0}^{\infty} \int_{\Omega_n} \sqrt{\frac{d\nu_n}{d\mu_n}}\, d\mu_n$$

où $\frac{d\nu_n}{d\mu_n}$ désigne la dérivée de Radon-Nikodym de ν_n par rapport à μ_n.

Nous allons présenter une preuve de ce théorème se basant sur la théorie des martingales de Doob.

Démonstration. – Tout d'abord, observons que

$$M_n = \prod_{j=0}^{n} \frac{d\nu_j}{d\mu_j}$$