UNIFORMISATION DE FEUILLETAGES ET FEUILLES ENTIÈRES

Marco Brunella

Panoramas et Synthèses

Numéro 35

2011

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

Panoramas & Synthèses
34/35, 2011, p. 1–52

UNIFORMISATION DE FEUILLETAGES ET FEUILLES ENTIÈRES

par

Marco Brunella

1. Introduction

Le but principal de ce texte est l'étude des courbes entières dans une variété projective complexe qui sont tangentes à un feuilletage holomorphe donné. Les feuilletages considérés seront toujours unidimensionnels.

Décrivons d'abord le problème et les résultats dans le cas d'un feuilletage *non singulier*. Soit donc X une variété projective (connexe), de dimension n, et soit $\mathcal{F}$ un feuilletage holomorphe sans singularités sur X. Localement, le feuilletage est défini par les orbites d'un champ de vecteurs holomorphe sans zéros. En recollant ces orbites locales, on obtient les feuilles du feuilletage : chaque feuille est une courbe complexe connexe L, équipée d'une immersion holomorphe injective $i : L \to X$. On distingue alors trois types de feuilles : les feuilles *rationnelles*, isomorphes à la droite projective $\mathbb{C}P^1$; les feuilles *paraboliques*, dont le revêtement universel est isomorphe à la droite affine $\mathbb{C}$; et les feuilles *hyperboliques*, dont le revêtement universel est isomorphe au disque $\mathbb{D}$.

En utilisant le théorème de stabilité de Reeb [**7**, §IV] et la projectivité de X (ou, plus exactement, sa kählérianité), il n'est pas difficile de voir que si $\mathcal{F}$ possède une feuille rationnelle alors *toutes* ses feuilles sont rationnelles, et $\mathcal{F}$ est une fibration en courbes rationnelles au dessus d'une variété projective Y, de dimension $n-1$. Voir aussi la proposition 3.5 ci-dessous. On supposera dans la suite de cette discussion qu'on n'est pas dans une telle situation (qui est banale, du point de vue de notre problème), et donc que pour chaque feuille L de $\mathcal{F}$ son revêtement universel $\widetilde{L}$ est isomorphe à $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{D}$. Bien sûr, il est possible que dans un même feuilletage il y ait simultanément des feuilles paraboliques et des feuilles hyperboliques, et c'est précisément ce mélange entre feuilles de types différents qui nous concernera. On désignera par $\mathcal{P}(\mathcal{F})$, resp. $\mathcal{H}(\mathcal{F})$, le sous-ensemble de X formé des points par lesquels la feuille de $\mathcal{F}$ est parabolique, resp. hyperbolique. On a donc une décomposition

$$X = \mathcal{P}(\mathcal{F}) \cup \mathcal{H}(\mathcal{F})$$

en deux sous-ensembles saturés par le feuilletage.

Soit $f : \mathbb{C} \to X$ une courbe entière, i.e. une application holomorphe non constante. Supposons que f soit tangente à $\mathcal{F}$: pour tout $t \in \mathbb{C}$, la dérivée $f'(t)$ appartient à $T_{f(t)}\mathcal{F}$. L'image de f est donc contenue dans une feuille L de $\mathcal{F}$, et d'après Liouville cette feuille doit être parabolique. On voit donc que, dans ce cas non-singulier, le sous-ensemble

$$\mathcal{E}(\mathcal{F}) \subset X$$

constitué des points par lesquels il passe une courbe entière tangente à $\mathcal{F}$ *coïncide* avec le sous-ensemble $\mathcal{P}(\mathcal{F})$.

Pour étudier $\mathcal{P}(\mathcal{F})$ on utilisera la construction suivante, qui trouve son origine dans un travail fondamental de Il′yashenko [**12**]. Soit $T \subset X$ un polydisque plongé, de dimension $n-1$, transverse à $\mathcal{F}$. Pour tout $t \in T$, soit L_t la feuille passant par t, et soit $\widetilde{L_t}$ son revêtement universel (avec t comme point base). On peut alors recoller holomorphiquement ces revêtements et obtenir une variété complexe

$$U_T = \bigcup_{t\in T} \widetilde{L_t}$$

appelée *tube universel* au dessus de T. Cette variété est naturellement équipée d'une application holomorphe

$$\Pi_T : U_T \to X$$

qui envoie $\widetilde{L_t} \subset U_T$ sur $L_t \subset X$, comme revêtement universel. L'application Π_T est un biholomorphisme local, ce qui permet de voir U_T comme domaine de Riemann au dessus de X.

On peut penser à U_T comme une sorte de « flow-box » semiglobal : le feuilletage relevé $\Pi_T^*(\mathcal{F})$ est dynamiquement trivial, au sens que ses feuilles sont les fibres d'une submersion $U_T \to T$. Ces fibres, toutefois, ne sont pas de petits disques dans les feuilles $\{L_t\}$, comme dans le théorème du flow-box, mais ce sont les revêtements universels des feuilles $\{L_t\}$. Remarquons que, en général, le biholomorphisme local Π_T est très loin d'être injectif ou propre : on peut dire que toute la dynamique du feuilletage est contenue dans ces applications Π_T, avec T variable dans X. La construction des tubes universels permet, dans un certain sens, de découpler la dynamique de l'uniformisation.

L'*existence* du tube universel U_T n'est pas triviale, comme on pourrait le croire de premier coup. Il s'agit de démontrer que le feuilletage $\mathcal{F}$ ne possède pas de cycles évanescents [**7**, §VII]. On peut d'ailleurs facilement construire des feuilletages holomorphes sur des variétés *non* kählériennes qui possèdent des cycles évanescents, et donc pour lesquels la construction des tubes universels n'est pas possible. Les Sections 2 et 3 de ce texte sont principalement vouées à la construction des tubes universels, dans un cadre plus général (le contenu de ces Sections se simplifie substantiellement dans le cas d'un feuilletage non singulier).

Après avoir établi l'existence de U_T, la question qui naturellement s'impose est celle de connaître ses propriétés analytiques complexes. Le travail de Il′yashenko sera à nouveau notre guide : dans **[12]** et **[13]** on démontre que, si l'on considère un feuilletage sur une variété de Stein, et non plus projective, alors les tubes universels sont eux aussi des variétés de Stein. Cette propriété est très utile puisque elle permet d'appliquer à un tube universel les résultats classiques de Nishino **[19]** et Yamaguchi **[30]** **[31]** concernant l'uniformisation simultanée des courbes complexes. On rappellera dans la Section 4 ces beaux résultats. Ici, contentons nous d'énoncer le corollaire suivant : si $\mathscr{F}$ est un feuilletage sur une variété de Stein connexe X, alors *ou bien* toutes les feuilles de $\mathscr{F}$ sont paraboliques *ou bien* les feuilles paraboliques remplissent un sous-ensemble $\mathscr{P}(\mathscr{F}) \subset X$ qui est *pluripolaire complet*, i.e. donné par les pôles d'une fonction plurisousharmonique sur X [**17**, §2].

Dans notre cas, la variété ambiant X n'est pas Stein, mais projective. Le tube universel U_T est un domaine de Riemann au dessus de X, et c'est très difficile, en général, d'établir des propriétés de convexité holomorphe pour de tels domaines. Par contre, pour les domaines de Riemann au dessus d'une variété de Stein on dispose de la théorie classique de Oka et Cartan-Thullen **[11]** **[18]**. Notre démarche dans la Section 4 sera alors la suivante : même sans démontrer que U_T est Stein, on arrivera à montrer que les résultats de Nishino et Yamaguchi s'appliquent à U_T, grâce principalement au fait que la variété projective X contient des hypersurfaces Y telles que $X \setminus Y$ est Stein. Conséquence : même dans le cas d'un feuilletage (non singulier) sur une variété projective X, on a la dichotomie

$$\mathscr{P}(\mathscr{F}) = X \quad \text{ou} \quad \mathscr{P}(\mathscr{F}) \text{ est pluripolaire complet.}$$

Nous n'irons pas au delà de cette dichotomie. Plusieurs problèmes importants restent ouverts : est-ce que $\mathscr{P}(\mathscr{F})$ est *fermé* dans X ? Est-ce qu'il est un sous-ensemble *analytique* ?

Dans le cas d'un feuilletage *singulier* cette théorie se complique considérablement. Posons $X^0 = X \setminus \mathrm{Sing}(\mathscr{F})$ et $\mathscr{F}^0 = \mathscr{F}|_{X^0}$. Pour tout $p \in X^0$, soit L_p^0 la feuille de $\mathscr{F}^0$ par p. Cette feuille peut contenir des *séparatrices*, i.e. des bouts paraboliques (isomorphes au disque épointé $\overline{\mathbb{D}}^*$) qui convergent vers un point de $\mathrm{Sing}(\mathscr{F})$. Si l'on compactifie chaque séparatrice, en ajoutant à L_p^0 la singularité vers laquelle la séparatrice adhère, on obtient la feuille complétée L_p. L'étude des courbes entières tangentes à $\mathscr{F}$ (qui peuvent, bien sûr, passer à travers des singularités) se ramène alors à l'étude des points $p \in X^0$ tels que L_p est parabolique (voire rationnelle).

Or, le problème est que les revêtements universels des feuilles complétées *ne se recollent pas* en donnant des tubes universels. Pour obtenir des tubes universels, comme dans le cas non singulier, il faut compactifier seulement *certaines* séparatrices, celles qui correspondent aux *bouts évanescents* (définition 3.1). Soit L'_p le résultat de cette compactification des bouts évanescents (on est ici un peu imprécis, car il faut en réalité remplacer L_p^0 par son revêtement d'holonomie, avant de compactifier les bouts évanescents). Il est bien possible que le sous-ensemble $\mathscr{E}(\mathcal{F})$ formé des points p tels que L_p n'est pas hyperbolique soit strictement plus grand que le sous-ensemble $\mathscr{P}(\mathcal{F})$ formé des points p tels que L'_p n'est pas hyperbolique : si l'on compactifie moins de bouts paraboliques, on a moins de chances d'obtenir une courbe non hyperbolique. On a donc une inclusion $\mathscr{P}(\mathcal{F}) \subset \mathscr{E}(\mathcal{F})$, et non plus une égalité.

Voici donc notre approche. On montrera (Section 5) que l'éventuelle différence

$$\mathscr{Z}(\mathcal{F}) = \mathscr{E}(\mathcal{F}) \setminus \mathscr{P}(\mathcal{F})$$

est *mince* dans X, i.e. contenue dans l'union dénombrable de sous-ensembles localement analytiques de codimension ≥ 1. La partie de $\mathscr{E}(\mathcal{F})$ représentée par $\mathscr{P}(\mathcal{F})$ est pluripolaire complète dans X, grâce aux résultats de la Section 4. Ensuite, on regarde la « restriction » de $\mathcal{F}$ à $\mathscr{Z}(\mathcal{F})$. Bien que $\mathscr{Z}(\mathcal{F})$ ne soit pas une sous-variété, on peut parler de bout évanescents « dans $\mathscr{Z}(\mathcal{F})$ » et par conséquent on peut construire des tubes universels « dans $\mathscr{Z}(\mathcal{F})$ ». Il est bien possible, voire souhaitable, qu'une séparatrice d'une feuille ne soit pas un bout évanescent dans X, mais qu'elle le devient dans $\mathscr{Z}(\mathcal{F})$. Cette théorie relative des bouts évanescents et des tubes universels est développée dans la Section 3.

On obtiendra alors, toujours grâce aux résultats de la Section 4, valables aussi dans ce cadre relatif, une ultérieure décomposition de $\mathscr{Z}(\mathcal{F})$ entre une partie pluripolaire complète et une partie mince dans $\mathscr{Z}(\mathcal{F})$. Cette partie mince dans $\mathscr{Z}(\mathcal{F})$ est très mince dans X, car elle est contenue dans l'union dénombrable de sous-ensembles localement analytiques de codimension ≥ 2. En répétant ces considérations, on arrive à se débarrasser de la partie mince, et donc au résultat final souhaité : le sous-ensemble $\mathscr{E}(\mathcal{F})$ s'écrit comme union *dénombrable* de familles *pluripolaires complètes* (voir la Section 5 pour un énoncé plus précis). En particulier, si $\mathscr{E}(\mathcal{F})$ n'est pas la totalité de X^0, alors $\mathscr{E}(\mathcal{F})$ est pluripolaire dans X^0 (mais peut-être non complet).

On peut rapprocher ce résultat au résultat correspondant (et classique, voire le lemme 5.1 ci-dessous) pour les courbes rationnelles tangentes à $\mathcal{F}$: l'ensemble de ces courbes s'écrit comme union dénombrable de familles analytiques. Quand on passe des courbes rationnelles aux courbes entières il s'agit de remplacer « analytiques » par « pluripolaires complètes », mais cela est probablement dû seulement à notre incapacité de mieux faire.

Remarque bibliographique. Ce texte est largement basé sur les articles [**4**] et [**5**]. On n'y trouve presque rien d'original, mais, pour des raisons pédagogiques, on y trouve plus de détails, d'exemples et de remarques. Il existe un autre texte de synthèse sur l'uniformisation des feuilletages : [**6**]. Toutefois, ces deux textes de synthèse sont assez différents, et plutôt complémentaires.

Tout d'abord, il y a une différence de finalité. Les résultats de [**6**] visent à étudier les propriétés de positivité du fibré canonique d'un feuilletage, problème qu'ici n'est même pas mentionné. Cette différence de finalité entraîne des différence dans la construction des tubes universels : dans [**6**] on demande que certaines applications méromorphes qui interviennent dans la définition de bout évanescent soient des immersions, hors de leurs points d'indétermination. En plus, dans [**6**] il n'y a rien concernant la théorie relative