FEUILLETAGES PAR VARIÉTÉS COMPLEXES ET PROBLÈMES D'UNIFORMISATION

Laurent Meersseman

Panoramas et Synthèses

Numéro 35 2011

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

Panoramas & Synthèses
34/35, 2011, p. 203–255

FEUILLETAGES PAR VARIÉTÉS COMPLEXES ET PROBLÈMES D'UNIFORMISATION

par

Laurent Meersseman

Résumé. – Ce texte est une introduction aux feuilletages par variétés complexes et aux problèmes d'uniformisation de tels feuilletages. Nous donnons en introduction une liste fondamentale de questions naturelles sur ces objets ainsi qu'un aperçu des résultats connus.

Introduction

Ce texte constitue une introduction aux feuilletages par variétés complexes, c'est-à-dire aux feuilletages d'une variété réelle dont le fibré tangent est muni d'un opérateur presque complexe intégrable. Ainsi les feuilles sont des variétés complexes qui forment une décomposition de la variété ambiante. Cette notion n'est pas nouvelle, loin de là (cf. les exemples du chapitre I) ; néanmoins, le point de vue adopté dans ces notes nous semble n'avoir été que peu développé jusqu'à présent et mériter une plus grande considération. Il consiste :

– à s'intéresser aux objets *abstraits* et *globaux*, et non plongés dans $\mathbb{C}^n$, cadre classique utilisé en analyse complexe. Ce choix entraîne que les problèmes, techniques et résultats décrits ici n'ont que peu de choses à voir avec ceux de l'analyse CR, qui traitent des objets plongés et en général d'un point de vue local. Ils se rapprochent beaucoup plus des études de structures géométriques sur une variété (cf. le texte de S. Dumitrescu). Un feuilletage par variétés complexes est en effet donné par l'existence d'un atlas modelé sur $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^p$, avec changements de cartes préservant les plaques $\mathbb{C}^n \times$ Cste. Lorsque la codimension p est nulle, il s'agit donc d'une variété complexe.

***Classification mathématique par sujets* (2010).** – 57R30, 32V99.
Mots clefs. – Feuilletages par variétés complexes, structures CR.

Ce travail a bénéficié d'une aide de l'Agence Nationale de la Recherche portant la référence ANR-08-JCJC-0130-01.

– à considérer les familles différentiables de déformations de variétés complexes comme un des exemples fondamentaux de telles structures. En effet, lorsqu'un feuilletage par variétés complexes est différentiablement trivial, il s'agit d'une famille de déformations au sens de Kodaira-Spencer [**19**]. On cherche alors à transposer des résultats classiques de théorie des déformations au cas feuilleté.

Notons que ces deux points de vue sont très différents. Dans le premier, on s'intéresse à des objets uniques, munis d'une structure géométrique généralisant la notion de structure complexe. Dans le second, on s'intéresse à des *familles* de variétés complexes, les feuilles du feuilletage. Cela donne lieu à deux séries de problèmes assez différents, mais entretenant entre eux des liens étroits.

D'une part, les questions fondamentales suivantes se posent :

Problème d'existence. – *Existence ou non-existence de structure complexe sur un feuilletage réel donné ; sur une variété différentiable donnée.*

Problème de plongement. – *Critères de plongement ou obstructions au plongement d'un feuilletage donné dans une variété complexe (plongement C^∞ qui réalise les feuilles comme sous-variétés holomorphes).*

Problème des modules. – *Déformations et espaces de modules de tels objets (le feuilletage réel sous-jacent étant fixé ; seule la structure complexe le long des feuilles varie).*

D'autre part, on tombe sur les problèmes d'uniformisation mentionnés dans le titre. Grosso modo, il s'agit de comprendre les relations entre la structure complexe d'une feuille spéciale, à savoir une feuille compacte à holonomie contractante ou une feuille dense et la structure complexe du feuilletage dans un voisinage de la feuille spéciale ; et d'étudier quand deux feuilletages sont CR-isomorphes, i.e. quand il existe un difféomorphisme feuilleté entre les deux qui soit un biholomorphisme en restriction à toute feuille. Cela donne les questions qui suivent :

Problème de rigidité. – *Conditions pour que la structure complexe sur un feuilletage soit entièrement ou partiellement déterminée par la structure complexe sur une feuille spéciale.*

Problème d'isomorphisme. – *Soient $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ deux feuilletages par variétés complexes difféomorphes. A quelles conditions sont-ils CR-isomorphes ? En particulier, s'ils sont ponctuellement isomorphes, i.e. toute feuille de $\mathcal{F}_1$ est biholomorphe à la feuille correspondante de $\mathcal{F}_2$, sous quelles conditions supplémentaires sont-ils CR-isomorphes ?*

et enfin

Problème de trivialité. – *Conditions sur $\mathcal{F}$ pour qu'il soit CR-trivial ? possède un revêtement CR-trivial ?*

On connaît très peu de choses sur ces problèmes. Sans prétendre à l'exhaustivité, nous donnerons une vue d'ensemble des cas connus. Le cas qui nous intéresse est le cas de grande dimension, à savoir de dimension supérieure ou égale à deux, et de codimension un. De même que pour les variétés complexes, la dimension un est très particulière. Par ailleurs, la codimension un nous semble la plus intéressante, ne serait-ce que parce qu'elle contient les exemples des hypersurfaces Levi-plates.

Ce texte comporte trois chapitres. Le premier contient les définitions, propriétés et exemples de base de feuilletages à feuilles complexes, ainsi que la description détaillée d'un exemple exotique, suivant [**24**]. Cet exemple est important à plusieurs titres. D'une part, il montre que le point de vue abstrait adopté ici n'est pas vide, puisqu'il s'agit d'un exemple qui ne peut être plongé dans une 3-variété complexe et qui ne s'obtient pas par quelques manipulations très simples d'exemples plongés. D'autre part, on connaît la réponse à tous les problèmes posés plus haut dans le cas particulier de ce feuilletage. Il est à noter que ce feuilletage, présenté dans [**24**] comme un feuilletage de la sphère $\mathbb{S}^5$ est en fait un feuilletage d'une 5-variété dont le groupe fondamental est non trivial. Nous élucidons cette différence ; et nous montrons pourquoi on ne peut espérer obtenir la sphère $\mathbb{S}^5$ avec ce type de méthodes.

Dans le deuxième chapitre, nous nous intéressons aux déformations. Nous rappelons le b-a-ba de la théorie standard de Kodaira-Spencer pour les variétés compactes complexes et nous donnons une preuve complète, suivant [**13**], du théorème de Fischer-Grauert, qui résout le problème d'isomorphisme pour les familles de déformations triviales. Puis nous parlons succinctement des déformations de feuilletages et du problème de modules. Le lecteur est incité à comparer avec le texte de Marcel Nicolau sur les déformations de feuilletages transversalement holomorphes.

Enfin, dans le troisième chapitre, nous expliquons les lemmes de compactifications de [**25**] qui traduisent les relations de contraintes entre structures complexes au voisinage d'une feuille spéciale compacte. Nous les utilisons pour répondre partiellement aux problèmes de rigidité et de trivialité pour certains types de feuilletages. Il faut souligner que ces lemmes, malgré leur aspect technique et anecdotique, jouent un rôle crucial dans presque tous les résultats que nous présentons. Ils constituent en fait le seul outil géométrique un tant soit peu général dont nous disposons pour étudier le voisinage d'une feuille compacte « attractante ».

On ne trouvera pas vraiment de résultats nouveaux dans ce texte, qui est avant tout introductif et panoramique. Les applications que nous donnons des lemmes de compactification, en particulier la variante feuilletée du théorème de Fischer-Grauert, ne figurent dans aucun article, mais sont de simples variations autour des résultats de [**25**]. Nous avons par contre tenu à donner une preuve complète de Fischer-Grauert, ne connaissant aucune référence où la trouver, en dehors de l'article original [**13**].

Un dernier mot. Lorsqu'on parle de feuilletages à feuilles complexes en codimension un et donc d'hypersurfaces Levi-plates, on ne peut faire l'impasse sur le problème du minimal exceptionnel, à savoir, sous sa forme faible, la non-existence d'un feuilletage par variétés complexes plongé dans l'espace projectif complexe. Il constitue sans conteste la question la plus célèbre de ce domaine. Nous nous contenterons ici d'une présentation très brève au chapitre I en liaison avec le problème de plongement, mais nous ne démontrerons aucun résultat. On ne trouvera donc presque rien sur le minimal exceptionnel dans ce cours. En effet, les techniques développées ici ne sont pas adaptées à ce problème.

1. Définitions et exemples

Dans cette section, après avoir défini précisément ce qu'est un feuilletage par variétés complexes, nous passons en revue les exemples standards. Puis nous décrivons en détail l'exemple d'un feuilletage exotique par surfaces complexes, exemple suffisamment riche pour justifier l'intérêt de l'étude qui suit. Enfin, nous parlons des problèmes d'existence et de plongement. Comme référence générale sur les feuilletages, on pourra consulter [**5**].

1.1. Notion de feuilletage par variétés complexes. – Soit X une variété différentiable connexe de dimension n. Un feuilletage *différentiable* de X de dimension p est grosso modo une partition de X en sous-variétés (immergées) connexes de dimension p, les feuilles, qui est localement isomorphe à un produit $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$.

La définition rigoureuse consiste à partir de la notion d'atlas feuilleté, à savoir un atlas modelé sur $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ et non sur $\mathbb{R}^n$.

Définition. – *Un atlas feuilleté de dimension p sur X est la donnée d'un atlas de variété différentiable sur X*

$$\phi_\alpha \ : \ U_\alpha \subset X \longrightarrow \phi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$$

tel que les changements de cartes

$$\phi_{\alpha\beta} \ : \ \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \xrightarrow{\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}} \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

préservent la décomposition $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$, i.e. envoient les plaques $\mathbb{R}^p \times \{Cte\}$ sur les plaques $\mathbb{R}^p \times \{Cte\}$.

Les changements de cartes $\phi_{\alpha\beta}$ prennent donc la forme suivante

$$(x,y) \longmapsto \phi_{\alpha\beta}(x,y) = (t_{\alpha\beta}(x,y), n_{\alpha\beta}(y))$$

i.e. la « partie transverse » $n_{\alpha\beta}$ dépend uniquement de y, la coordonnée transverse du feuilletage.

Etant donné un atlas feuilleté sur X, on peut alors définir une relation d'équivalence dans chaque U_α par

$$x \sim y, \ x, y \in U_\alpha \iff \phi_\alpha(x) \text{ et } \phi_\alpha(y) \text{ appartiennent à la même plaque.}$$

On globalise cette relation sur X en saturant par transitivité. Ainsi deux points x et y de X sont équivalents s'il existe une suite de points $x_0 = x, x_1, \ldots, x_d = y$ tels que deux points successifs de cette suite soient localement équivalents dans une carte.

Les classes d'équivalence de cette relation forment les feuilles du feuilletage $\mathscr{F}$ défini par l'atlas feuilleté dont on est parti. Elles s'obtiennent en recollant les plaques au