Panoramas & Synthèses
46, 2015, p. 1–133

GROUPES CLASSIQUES

par

Baptiste Calmès & Jean Fasel

Résumé. – Nous introduisons les groupes algébriques linéaires dits « classiques » sur une base quelconque, puis nous les replaçons dans la classification des groupes réductifs établie dans [**6**]. Nous traitons les cas non déployés, et décrivons au passage plusieurs catégories de torseurs.

***Abstract* (Classical groups).** – We introduce so-called "classical" linear algebraic groups over a general base, and we then place them where they belong in the classification of reductive groups established in [**6**]. We cover the non split cases, and we describe on the way several categories of torsors.

1. Introduction

L'objet principal de [**6**] est la classification des schémas en groupes réductifs sur une base quelconque. Rappelons tout d'abord qu'un groupe algébrique G sur une base S est réductif (au sens de [**6**], voir Exp. XIX, déf. 2.7) s'il est lisse et affine sur S, et à fibres géométriques réductives et connexes au sens de la théorie sur les corps ; sur les fibres géométriques, son radical est donc un tore (voir [**6**, Exp. XIX, déf. 1.6.1]). Il est de plus semi-simple si ces fibres sont semi-simples (radical trivial). Notons qu'être réductif ou semi-simple est en fait par descente une propriété locale pour toutes les topologies considérées dans cet article.

Le but de cette note est de faire le lien entre les groupes linéaires et quadratiques dits « classiques » et la classification de [**6**]. Cet exposé s'adressant en priorité aux lecteurs qui ne sont pas habitués à la terminologie employée dans l'ouvrage, de nombreux détails de calculs, exemples et traductions sont fournis.

***Classification mathématique par sujets* (2010).** – 20G07, 20G10, 14L15, 14L30.
Mots clefs. – Groupe classique, schéma en groupes, algèbre centrale simple, algèbre à division, forme quadratique, groupe orthogonal, groupe linéaire, torseur.

Notations. – *Dans tout ce qui suit, R désigne un anneau associatif commutatif et unitaire, S un schéma de base quelconque, implicitement égal à* $\mathrm{Spec}(R)$ *lorsqu'il est affine.*

Soit X un schéma sur S, et soit $T \to S$ un morphisme de schémas. La notation X_T désigne le produit fibré de X par T sur S. Lorsque T est le spectre d'un anneau R', on s'autorisera également la notation $X_{R'}$ pour X_T. Un point $s \in S$ correspond à un morphisme de son corps résiduel $\kappa(s)$ vers S, et $X_s = X_{\kappa(s)}$ est alors appelé *fibre* en s. Si $\bar{s}$ est le spectre d'une clôture algébrique de $\kappa(s)$, le schéma $X_{\bar{s}}$ est appelé *fibre géométrique*.

La méthode suivie dans ce texte comporte plusieurs étapes. Tout d'abord, il nous faut introduire et définir les groupes classiques que l'on veut replacer dans la classification. Il s'agit des groupes semi-simples adjoints ou simplement connexes, des séries A_n, B_n, C_n et D_n, bien que nous en manipulions bien d'autres au passage. Conformément à la philosophie de [**6**], les schémas (en groupes) sont vus comme des foncteurs de points représentables. Nos groupes classiques sont donc introduits comme des foncteurs de points, puis on montre qu'ils sont représentables par des schémas affines sur la base, ce qui ne pose pas de réelle difficulté pour deux raisons : beaucoup de nos groupes sont construits comme des produits fibrés de groupes obtenus précédemment, et cette opération préserve la représentabilité. Par ailleurs, la représentabilité par des schémas affines sur la base peut se tester localement pour la topologie fppf ou étale. Ces deux topologies de Grothendieck sont d'ailleurs quasiment les seules que nous utiliserons, en dehors de la topologie de Zariski, bien entendu.

Les groupes classiques se construisent à l'aide de structures algébriques comme des modules quadratiques, des algèbres d'Azumaya, ou des algèbres à involution. Nous discutons donc ces structures sur une base quelconque dans les sections 2.5, 2.6 et 2.7. Les groupes sont alors introduits dans les parties 2.4 et 3 pour les groupes de type linéaire (liés au type A_n), ainsi que dans la partie 4 pour les groupes en rapport avec les modules quadratiques ou plus généralement les algèbres à involution.

Une fois la plupart des groupes introduits, il faut identifier les groupes déployés, leur version sur $\mathbb{Z}$, dits groupes de Chevalley, et prouver qu'ils sont bien réductifs. Le principal problème est la lissité, qui doit essentiellement être obtenue à la main en vérifiant d'abord la lissité de chaque fibre géométrique, ce qui revient, parce qu'on est sur un corps, à comparer la dimension de Krull et celle de l'algèbre de Lie, puis on montre que la dimension de ces fibres ne varie pas. Les critères précis sont rappelés en section 2.9.

L'étape d'après, est de trouver la donnée radicielle de chacun des groupes. Cela consiste à décrire un tore maximal déployé, expliciter l'algèbre de Lie et la représentation adjointe, y trouver les racines, et constater qu'elles forment bien les données radicielles des types considérés.

Ces deux dernières étapes forment les parties intitulées « Groupe déployé adjoint » et « Groupe déployé simplement connexe » de chacune des sections 3 (type A_n), 6 (type B_n), 7 (type C_n) et 8 (type D_n).

Il reste alors le problème de la torsion. Si **[6]** nous dit que tous les groupes réductifs sont des formes étales des groupes déployés, il nous faut montrer pour être complet que les différents groupes classiques que nous avons introduits, en plus du cas déployé, constituent toutes les formes étales de ces groupes, qu'il n'y en a pas d'autres. Pour cela, nous avons recours au formalisme du produit contracté, décrit en section 2.2. Ce formalisme nous dit que toute forme est en fait un produit contracté du groupe par un torseur sous son groupe d'automorphismes. Il nous faut donc identifier les groupes d'automorphismes, ce qui est fait dans les sections du même nom dans les quatre parties 3, 6, 7 et 8.

Puis, il faut être capable de donner une description assez concrète des torseurs pour expliciter les produits contractés. C'est la raison pour laquelle nous utilisons des champs, car c'est un cadre très souple dans lequel on peut formaliser les produits contractés, et construire des catégories concrètes d'objets algébriques (par exemple les modules quadratiques), équivalentes à des catégories de torseurs. Le texte est donc parsemé de théorèmes qui comparent un champ bien concret (comme celui des modules quadratiques) avec une catégorie de torseurs (par exemple sous le groupe orthogonal). Comme nous savons que le mot « champ » provoque immanquablement chez certains un rhume des foins, nous nous empressons d'ajouter que nous n'utilisons aucune des subtilités qui font le bonheur des champistes. Le peu de choses que nous utilisons effectivement est rappelé dans les parties 2.1 et 2.2, et pourrait se résumer en quelque mots : un champ est une sorte de catégorie dans laquelle les objets et les morphismes peuvent se construire localement. Nous faisons un usage répétitif des produits fibrés de champs, pour en fabriquer de nouveaux sans peine. Les premiers champs que nous introduisons sont construits comme des structures sur les faisceaux, ce qui explique la présence de la partie 2.1. Nous avons également inclus à titre d'exemple quelques calculs de gerbes, qui correspondent aux morphisme de connexion vers le terme H^2 des suites exactes de cohomologie.

Faute de temps, nous avons laissé de côté un certain nombre de choses, qui pourraient probablement être traitées par les mêmes méthodes. Citons : la description systématique des catégories de torseurs sous tous les groupes mentionnés, y compris ceux qui ne sont pas déployés ; la description des variétés projectives homogènes sous les groupes considérés ; la description de types simples intermédiaires entre le cas simplement connexe et le cas adjoint, lorsqu'ils existent (par exemple en type A_n) ; la description de types mixtes ; la description des types exceptionnels déjà connus sur les corps (ex : G_2, F_4) ; la description du type D_4 ; la description des isomorphismes exceptionnels de bas rang.

Les principales difficultés que nous avons rencontrées sont de deux natures : premièrement, bien souvent, dans la littérature, les constructions sont faites sur les corps, en distinguant la caractéristique 2 des autres. Or, pour travailler sur une base quelconque, ces distinctions sont interdites, les constructions doivent être indépendantes d'une éventuelle caractéristique. Deuxièmement, sur un corps, tous les fibrés vectoriels sont triviaux, et certains invariants ne se voient donc pas. Nous avons donc dû en rajouter certains. Voir par exemple l'invariant l_q qui intervient dans les formes strictement intérieures des types simplement connexes B_n et D_n.

Outre SGA3, les trois grandes références que nous avons utilisé sans vergogne sont le livre de Giraud sur les champs [**8**], celui de Knus sur les formes quadratiques [**14**], et le livre des involutions de Knus, Merkurjev, Rost et Tignol [**15**], ce dernier principalement pour sa notion de paire quadratique, qui fonctionne en toute caractéristique, et tous les groupes qui en découlent.

Vu le grand nombre de groupes et de champs considérés, pour que la lectrice ne soit pas perdue, nous avons ajouté des tables à la fin du texte qui listent les groupes les plus importants, ainsi que les équivalences entre certains champs et certaines catégories de torseurs, avec références aux endroits du texte concernés.

Nous remercions vivement Philippe Gille pour diverses explications sur des points techniques de SGA3, Cyril Demarche pour son aide sur les champs et les gerbes, Asher Auel pour ses précisions sur les algèbres de Clifford, et enfin Skip Garibaldi, Sylvain Brochard et les rapporteurs anonymes pour leurs suggestions d'amélioration à partir d'une version préliminaire de ce texte.

2. Préliminaires

2.1. Structures

2.1.1. *Structures élémentaires.* – Expliquons brièvement la notion de structure dans une catégorie $\mathscr{C}$ munie de produits finis, puis la notion d'objet $\mathfrak{X}$ en cette structure. Nous voulons que ce formalisme puisse contenir la notion d'objet en groupes dans une catégorie donnée, ou bien la notion de $\mathbf{O}_S$-modules dans la catgorie des S-foncteurs de points ; voir les exemples 2.1.1.4 ci-après. Dans tout les cas, il faut pouvoir spécifier des morphismes, comme la muliplication $G \times G \to G$ d'un objet en groupes, et des contraintes vérifiées par ces morphismes, comme l'associativité. Enfin, nous avons besoin d'objets et de morphismes que nous appellerons constants, comme par exemple l'objet neutre qui nous servira d'unité pour les groupes, ou bien l'objet en anneaux $\mathbf{O}_S$ et sa multiplication, dont on se sert pour définir chaque $\mathbf{O}_S$-modules.

En termes précis, ces structures se formalisent à l'aide de deux constructions catégoriques classiques : Étant donné un graphe orienté γ, notons $\mathrm{Cat}(\gamma)$ la catégorie engendrée par ce graphe (la catégorie des chemins de ce graphe). Cette construction est fonctorielle et définit un adjoint à gauche du foncteur oubli de la catégorie des petites catégories vers celle des graphes (voir [**17**, Ch. II, §7]). Notons également $\Pi(\mathscr{C})$ la complétion d'une petite catégorie $\mathscr{C}$ par les produits finis. C'est également une construction fonctorielle, et qui définit un adjoint à gauche du foncteur d'oubli de la catégorie des petites catégories munies de produits finis (avec pour morphismes les foncteurs les respectant) vers la catégorie des petites catégories. Une autre manière de le dire est que pour toute petite catégorie $\mathscr{C}$, il y a un foncteur canonique $\mathscr{C} \to \Pi(\mathscr{C})$ et on a la propriété universelle suivante : tout foncteur de $\mathscr{C}$ dans une catégorie $\mathscr{D}$ munie de produits finis se factorise de manière unique par un foncteur $\Pi(\mathscr{C}) \to \mathscr{D}$ qui conserve les produits. La catégorie $\Pi(\mathscr{C})$ se construit aisément de manière combinatoire à partir de $\mathscr{C}$.(1)

***Définition* 2.1.1.1.** – Une *structure dans* $\mathscr{C}$ est la donnée de :

1. un graphe orienté fini γ et un morphisme de graphes orientés $c : \gamma \to \mathscr{C}$ (qui spécifie les constantes) ;
2. un ensemble fini I et un graphe F contenant le graphe $\Pi(\mathrm{Cat}(I \sqcup \gamma))$, ayant les mêmes sommets que celui-ci, et seulement un nombre fini d'arêtes supplémentaires (qui correspondent aux morphismes) ;
3. une relation d'équivalence R sur les morphismes de $\Pi(\mathrm{Cat}(F))$ engendrée par un nombre fini de relations $f \sim g$ entre morphismes de $\Pi(\mathrm{Cat}(F))$ (ce qui définit les contraintes sur les morphismes).

On obtient alors un morphisme de graphes g donné par la composée

$$\gamma \to I \sqcup \gamma \to \mathrm{Cat}(I \sqcup \gamma) \to \Pi(\mathrm{Cat}(I \sqcup \gamma)) \subseteq F \to \Pi(\mathrm{Cat}(F))$$

(où les unités des deux adjonctions ont été utilisées) et on peut considérer la catégorie quotiente $\Pi(\mathrm{Cat}(F))/R$, au sens de [**17**, Ch. II, §8].

***Définition* 2.1.1.2.** – Si $\mathfrak{struc}$ est une structure dans $\mathscr{C}$ au sens de la définition précédente, un *objet en* $\mathfrak{struc}$ est un foncteur $\mathfrak{X} : \Pi(\mathrm{Cat}(F))/R \to \mathscr{C}$ tel que $\mathfrak{X} \circ g = c$. La catégorie $\mathscr{C}^{\mathfrak{struc}}$ des objets en $\mathfrak{struc}$ est celle des foncteurs $\Pi(\mathrm{Cat}(F))/R \to \mathscr{C}$.

Remarquons que la donnée d'un tel foncteur $\mathfrak{X}$ est équivalente à la donnée d'un foncteur $\Pi(\mathrm{Cat}(F)) \to \mathscr{C}$, compatible à la relation d'équivalence R, et que $c : \gamma \to \mathscr{C}$ étant déjà fixé, par les propriétés universelles, il suffit de donner les objets images des $i \in I$ (qu'on peut noter X_i) puis les images des arêtes supplémentaires de F, en s'assurant qu'elles respectent les contraintes données par la relation d'équivalence.

***Définition* 2.1.1.3.** – Si $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ est foncteur respectant les produits finis, on peut pousser une structure $\mathfrak{struc}$ dans $\mathscr{C}$ vers une structure $F(\mathfrak{struc})$ dans $\mathscr{D}$ de la manière évidente, et on obtient également un foncteur $F : \mathscr{C}^{\mathfrak{struc}} \to \mathscr{D}^{F(\mathfrak{struc})}$.

***Exemple* 2.1.1.4.** – Tout d'abord, pour chaque ensemble I, la structure triviale sur un ensemble d'objets indicés par I est celle pour laquelle les constantes, morphismes et relations sont vides. Mentionnons encore les structures suivantes (dans les S-foncteurs de points, ou dans les S-faisceaux pour une certaine topologie) que nous rencontrerons :

(1) Nous n'avons pas de bonne référence pour cette construction, mais on peut procéder comme suit : on considère la catégorie dont les objets sont des ensembles finis au-dessus de l'ensemble des objets de $\mathscr{C}$, et avec pour morphismes de $\phi : A \to \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ vers $\psi : B \to \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ les applications $\theta : A \to B$ munies d'un étiquetage $a \mapsto f_a$ de chaque élément de A par un morphisme $f_a : \phi(a) \to \psi(\theta(a))$ de $\mathscr{C}$. On vérifie alors que la catégorie opposée de cette catégorie répond au problème.