Cohomologie de la fibration de Hitchin tronquée

Pierre-Henri Chaudouard

Panoramas et Synthèses

Numéro 46

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

Panoramas & Synthèses
46, 2015, p. 135–157

COHOMOLOGIE DE LA FIBRATION DE HITCHIN TRONQUÉE

par

Pierre-Henri Chaudouard

Résumé. – Cet article est une introduction à la fibration de Hitchin pour un groupe reductif général et sa variante tronquée. Cette fibration est au cœur des démonstrations du lemme fondamental par Ngô et du lemme fondamental pondéré par Laumon et l'auteur. Nous expliquons le principal résultat cohomologique qui est la clef de notre démonstration. En guise d'illustration, nous esquissons la démonstration d'une relation entre les cohomologies des fibrations de Hitchin pour le groupe $Sp(2n)$ et son groupe dual $SO(2n+1)$.

***Abstract* (Cohomology of the truncated Hitchin fibration).** – This paper is an introduction to the (truncated) Hitchin fibration for a general reductive group. This fibration is the central object in the proofs of the fundamental lemma (by Ngô) and the weighted fundamental lemma (by Laumon and the author). We give also some explanations about the main cohomological result that is the key of our proofs. As an illustration of our methods, we sketch the proof of a relation between the cohomologies of Hitchin fibrations attached to the group $Sp(2n)$ and its dual group $SO(2n+1)$.

1. Introduction

1.1. Le lemme fondamental. – Le « lemme fondamental » est une identité combinatoire entre intégrales orbitales sur les corps p-adiques formulée par Langlands-Shelstad. S'il avait pu être démontré « à la main » pour le groupe $GL(n)$ et des groupes reliés ainsi que dans quelques cas de petite dimension, il est resté longtemps comme la pierre d'achoppement dans l'obtention de fonctorialités de Langlands via la formule des traces d'Arthur-Selberg, l'un des outils les plus puissants dans le programme de Langlands. En fait, l'énoncé de Langlands est *mutandis mutatis* équivalent à l'énoncé analogue qu'on peut formuler sur un corps local de caractéristiques égales (cf. **[26]**, **[28]**, **[11]**). Dans cette situation, Goresky-Kottwitz-MacPherson (cf. **[15]**) ont montré

***Classification mathématique par sujets* (2010).** – 14D20, 11F70, 11F72, 11R39, 22E55.
Mots clefs. – Fibration de Hitchin, programme de Langlands, lemme fondamental de Langlands-Shelstad, lemme fondamental pondéré d'Arthur, cohomologie perverse.

que les intégrales orbitales en question comptent les points rationnels de certaines variétés sur les corps finis (des quotients de fibres de Springer affines). Via la formule des traces de Grothendieck-Lefschetz, ils ont obtenu une interprétation cohomologique du lemme fondamental. Mieux, ils ont ainsi pu en démontrer certains cas particuliers. Ils n'obtiennent pas le cas général car leur méthode bute sur une hypothèse de pureté des fibres de Springer affines (qui n'est pas connue en général) et utilise fortement l'action de certains tores qui n'apparaissent que dans les cas dits non ramifiés. Laumon (cf. [**21**]) a ensuite remarqué que les intégrales orbitales pour le groupe $GL(n)$ sont aussi reliées au comptage de points rationnels de jacobiennes compactifiées de certaines courbes singulières sur les corps finis. Plus généralement, et c'est une observation cruciale due à Ngô (cf. [**22**]), une intégrale orbitale globale (c'est-à-dire adélique) pour un groupe réductif quelconque s'interprète comme un comptage de points rationnels dans une fibre de la fibration de Hitchin « elliptique ». Comme ces fibres varient dans des familles, on peut espérer que la cohomologie des fibres les plus singulières se déduise de celle des fibres « génériques » qui ont des propriétés bien plus agréables (pour $GL(n)$ ce sont essentiellement des variétés abéliennes). C'est précisément ce genre d'énoncé que démontre Ngô dans [**23**] via la théorie des faisceaux pervers. Et c'est la clef de sa démonstration du lemme fondamental.

1.2. Le lemme fondamental pondéré. – L'utilisation de la formule des traces pour démontrer certaines fonctorialités de Langlands requiert également un lemme fondamental étendu à d'autres intégrales orbitales « pondérées » : c'est le lemme fondamental pondéré formulé par Arthur. Dans un travail avec Gérard Laumon ([**8**], [**9**] et [**10**]) nous démontrons cet énoncé d'Arthur. Bien que notre approche suive de près celle de Ngô, notre démonstration est plus qu'une simple conséquence de son travail. Pour obtenir le lemme fondamental pondéré, il nous faut considérer en effet des fibres de Hitchin non-elliptiques. Or celles-ci ne sont même pas de type fini. Une de nos innovations consiste à introduire une troncature de ces fibres non-elliptiques en utilisant une notion de stabilité adéquate. On montre que les fibres de Hitchin ainsi tronquées sont alors propres. La première bonne surprise est que le comptage de ces fibres tronquées s'interprète parfaitement en terme d'intégrales orbitales pondérées. La seconde bonne surprise est que la cohomologie des fibres de Hitchin tronquées est déterminée par celle des fibres de Hitchin elliptiques. Ce résultat cohomologique est la clef de notre démonstration du lemme fondamental pondéré.

1.3. Contenu de l'article. – Dans cet article d'exposition, nous décrivons la troncature utilisée sur la fibration de Hitchin et le principal théorème cohomologique que nous obtenons. Dans la section 2, nous commençons par décrire la fibration de Hitchin pour un groupe réductif telle qu'elle apparaît dans l'article [**23**] de Ngô et nous en donnons les principales propriétés. Dans la section 3, nous expliquons notre troncature de la fibration de Hitchin. Dans la section finale 4, nous énonçons notre principal résultat cohomologique. Pour terminer, nous en esquissons une application à la situation de « l'endoscopie non-standard » entre le groupe symplectique $Sp(2n)$ et son groupe dual, le groupe orthogonal $SO(2n+1)$. Nous obtenons un isomorphisme entre certains facteurs directs de la cohomologie perverse de la fibration de Hitchin pour ces deux groupes.

1.4. Remerciements. – Ce texte repose d'une part sur les articles de Ngô ([**22**] et [**23**]) et d'autre part sur un travail que j'ai eu le plaisir de réaliser en collaboration avec Gérard Laumon. Je remercie chaleureusement les organisateurs de m'avoir invité à soumettre un texte aux actes de la conférence d'autant plus qu'une naissance imminente m'a empêché d'y participer. Je remercie enfin les rapporteurs de cet article pour leur relecture.

2. La fibration de Hitchin

2.1. Groupe, tore et groupe de Weyl. – Soit k une clôture algébrique d'un corps fini $\mathbb{F}_q$ à q éléments. Soit G un groupe algébrique réductif et connexe sur k. Soit

$$n = \mathrm{rang}(G).$$

Soit T un sous-tore maximal de G. Soit $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{t}$ les algèbres de Lie respectives de G et T. Soit

$$W = W^G$$

le groupe de Weyl de (G,T). On suppose dans toute la suite que l'ordre du groupe de Weyl $|W^G|$ est inversible dans k.

2.2. Schéma $\mathfrak{car}$. – Le groupe W agit sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{t}$. Soit

$$\mathfrak{car} = \mathrm{Spec}(k[\mathfrak{t}]^W)$$

le spectre de l'algèbre $k[\mathfrak{t}]^W$ des fonctions polynomiales sur $\mathfrak{t}$ invariantes par W. On sait bien que cette algèbre est engendrée par n éléments de $k[\mathfrak{t}]^W$ qui sont algébriquement indépendants et homogènes. Ces éléments ne sont pas uniques mais leurs degrés $e_1 \leq \cdots \leq e_n$ le sont. On a d'ailleurs

$$e_1 + \cdots + e_n = (\dim(G) + \mathrm{rang}(G))/2. \tag{1}$$

En particulier, le schéma $\mathfrak{car}$ est isomorphe non canoniquement à l'espace affine de dimension n, le rang de G.

L'inclusion de l'algèbre dans l'algèbre $k[\mathfrak{t}]$ de toutes les fonctions polynomiales sur $\mathfrak{t}$ donne dualement un morphisme

$$\chi = \chi_G^T : \mathfrak{t} \to \mathfrak{car}$$

qui est un revêtement fini et galoisien de groupe W.

Soit D^G le discriminant défini comme le produit des dérivées des racines de T dans G : c'est une fonction régulière sur $\mathfrak{t}$ qui est W-invariante autrement dit $D^G \in k[\mathfrak{t}]^W$. La condition $D^G \neq 0$ définit un ouvert de $\mathfrak{car}$ appelé « l'ouvert régulier » et noté $\mathfrak{car}^{\mathrm{reg}}$. Au-dessus de cet ouvert, le morphisme χ est de plus étale. Soit

$$\mathfrak{t}^{\mathrm{reg}} = \chi^{-1}(\mathfrak{car}^{\mathrm{reg}})$$

l'image inverse de l'ouvert $\mathfrak{car}^{\text{reg}}$; c'est encore l'ouvert de $\mathfrak{t}$ où le discriminant ne s'annule pas.

2.3. Morphisme caractéristique. – Soit $k[\mathfrak{g}]$ l'algèbre des fonctions polynomiales sur $\mathfrak{g}$. Le groupe G agit sur son algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ par l'action adjointe. Soit $k[\mathfrak{g}]^G$ la sous-algèbre des fonctions polynomiales invariantes par G. Le morphisme de restriction

$$k[\mathfrak{g}] \to k[\mathfrak{t}]$$

induit un morphisme

$$k[\mathfrak{g}]^G \to k[\mathfrak{t}]^W$$

qui est en fait un isomorphisme dû à Chevalley. Le *morphisme caractéristique*

$$\chi = \chi_G : \mathfrak{g} \to \mathfrak{car}$$

est obtenu par composition du morphisme canonique

$$\mathfrak{g} \to \operatorname{Spec}(k[\mathfrak{g}]^G)$$

dual de l'inclusion $k[\mathfrak{g}]^G \subset k[\mathfrak{g}]$ avec l'isomorphisme de Chevalley

$$\operatorname{Spec}(k[\mathfrak{g}]^G) \simeq \operatorname{Spec}(k[\mathfrak{t}]^W) = \mathfrak{car}.$$

L'ouvert de $\mathfrak{g}$

$$\mathfrak{g}^{\text{sreg}}$$

défini comme l'image inverse par χ de l'ouvert $\mathfrak{car}^{\text{reg}}$ est l'ouvert formé des éléments de $\mathfrak{g}$ qui sont semi-simples et réguliers au sens où leur centralisateur dans G est un tore maximal.

2.4. Centralisateur régulier. – Soit

$$I = \{(X, g) \in \mathfrak{g} \times G \mid \operatorname{Ad}(g)X = X\} \to \mathfrak{g}$$

le schéma en groupes des centralisateurs sur $\mathfrak{g}$. Ce schéma n'est pas plat (la dimension de ses fibres varie sur $\mathfrak{g}$ comme on peut déjà le voir pour $GL(n)$). Cependant si on définit l'ouvert régulier $\mathfrak{g}^{\text{reg}}$ de $\mathfrak{g}$ sur lequel les fibres de I sont de dimension minimale (égale au rang de G) et si l'on note I^{reg} la restriction de I à l'ouvert $\mathfrak{g}^{\text{reg}}$, on obtient un schéma en groupes

$$I^{\text{reg}} \to \mathfrak{g}^{\text{reg}}$$

qui est lisse et commutatif (c'est même un schéma en tores sur l'ouvert $\mathfrak{g}^{\text{sreg}}$). D'après Ngô (**[23]** lemme 2.1.1), ce schéma en groupes I^{reg} se descend en un schéma en groupes lisse commutatif

$$J \to \mathfrak{car},$$

appelé schéma en groupes des centralisateurs réguliers, qui vérifie les deux propriétés fondamentales suivantes

1. la restriction de χ^*J à l'ouvert $\mathfrak{g}^{\text{reg}}$ est muni d'un isomorphisme avec I^{reg} ;
2. cet isomorphisme se prolonge en un morphisme

$$\chi^*J \to I. \tag{2}$$