Cohomologie de Hochschild non abélienne et extensions de faisceaux en groupes

Cyril Demarche

Panoramas et Synthèses

Numéro 46

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

Panoramas & Synthèses
46, 2015, p. 255–292

COHOMOLOGIE DE HOCHSCHILD NON ABÉLIENNE ET EXTENSIONS DE FAISCEAUX EN GROUPES

par

Cyril Demarche

Résumé. – Un théorème classique dû à Mostow assure que sur un corps de caractéristique nulle, toute extension d'un groupe algébrique réductif par un groupe algébrique unipotent est scindée, et que deux sections de cette extension sont conjuguées sur le corps de base. Suivant des idées de Giraud et Breen, on introduit dans ce texte des ensembles de cohomologie non abélienne qui classifient les extensions d'un schéma en groupes par un autre, ainsi que les sections de telles extensions. On utilise ensuite ces ensembles de cohomologie pour obtenir des versions du résultat de Mostow sur des schémas de base plus généraux que des corps de caractéristique nulle.

***Abstract* (Non-Abelian Hochschild cohomology and extensions of group sheaves)**
A classical result by Mostow states that over a field of characteristic zero, any extension of a reductive algebraic group by a unipotent algebraic group splits, and that any two sections of this extension are conjugate over the ground field. Following ideas of Giraud and Breen, we introduce in this text some non-abelian cohomology sets that classify both extensions of a given group scheme by another one, and sections of such extensions. We use those cohomology sets to get new versions of Mostow's result over base schemes that are more general than fields of characteristic zero.

1. Introduction

L'objectif de ce texte est d'utiliser et de préciser les constructions classiques de Giraud ([**7**] VIII.7) et Breen ([**3**], paragraphe 8) sur la classification des extensions de faisceaux en groupes en termes de gerbes, afin d'obtenir des versions du théorème suivant de Mostow sur des bases plus générales qu'un corps de caractéristique nulle (voir par exemple [**15**], théorème 7.1) :

***Classification mathématique par sujets* (2010).** – 14L15, 18F20, 20J06, 20G07.
Mots clefs. – Cohomologie non abélienne, schémas en groupes, torseurs, gerbes.

***Théorème* (Mostow).** – *Soit k un corps de caractéristique nulle. Soit G un k-groupe réductif et H un k-groupe unipotent. Alors toute suite exacte de k-groupes algébriques*

$$1 \to H \to E \to G \to 1$$

est scindée, et deux sections de cette suite sont conjuguées par un élément de $H(k)$.

Le point de départ et la motivation pour ce texte est l'exposé XVII de [**5**], et en particulier la section 5 de cet exposé (voir notamment le théorème 5.1.1) qui traite de la question des extensions d'un groupe de type multiplicatif par un groupe unipotent sur un corps quelconque. Une autre référence importante est la section 2 de l'exposé XXVI de [**5**], qui traite des sous-groupes de Levi pour les sous-groupes paraboliques d'un schéma en groupes réductif sur une base quelconque.

Remerciements. – Je tiens à remercier vivement Philippe Gille pour m'avoir suggéré de travailler sur ces questions. Je remercie également les deux rapporteurs pour leur lecture attentive du manuscript et leurs précieux commentaires.

2. Cohomologie des foncteurs en G-groupes

Dans cette section, on définit des ensembles de cohomologie de Hochschild pour des foncteurs en groupes non commutatifs. On renvoie à [**4**], chapitre II, paragraphe 3, pour le cas de la cohomologie de Hochschild des foncteurs en groupes commutatifs.

Dans toute cette section, $\mathscr{A}$ désigne une catégorie, munie d'un objet initial A_0. Par définition, un foncteur en groupes sur $\mathscr{A}$ est un foncteur $F : \mathscr{A} \to \underline{\text{Groupes}}$ à valeurs dans la catégories des groupes.

2.1. Degré 0. – Soient G et H deux $\mathscr{A}$-foncteurs en groupes.

***Définition* 2.1.1.** – Une action (à gauche) de G sur H est un foncteur $m : G \times H \to H$ vérifiant les conditions suivantes : pour tout $A \in \mathscr{A}$, pour tout $g, g' \in G(A)$, tout $h, h' \in H(A)$, $m(g, m(g', h)) = m(gg', h)$ et $m(g, h.h') = m(g, h).m(g, h')$. On dira alors que m définit une structure de $\mathscr{A}$-foncteur en G-groupes sur H.

***Définition* 2.1.2.** – Soit H un $\mathscr{A}$-foncteur en G-groupes. On définit le groupe $H^0_{\mathrm{coc}}(G, H)$ comme l'ensemble $H^G(A_0)$, où H^G désigne le foncteur des points fixes de H sous G.

2.2. Degré 1. – Donnons une définition cocyclique de l'ensemble $H^1_{\mathrm{coc}}(G,H)$:

***Définition* 2.2.1**. – Si H est un G-groupe, on note $H^1_{\mathrm{coc}}(G,H)$ le quotient de l'ensemble $\mathrm{Crois}(G,H)$ des homomorphismes croisés de G dans H (un tel morphisme croisé est une famille indexée par $\mathscr{A}$ de morphismes croisés $G(A) \to H(A)$) par l'action usuelle de $H(A_0)$.

Soit $f : H_1 \to H_2$ un morphisme de $\mathscr{A}$-foncteurs en groupes. On définit $\mathrm{Sect}_{\mathscr{A}}(f : H_1 \to H_2)$ comme l'ensemble des sections du morphisme de groupes f, quotienté par la relation d'équivalence suivante : $s, s' : H_2 \to H_1$ sont dites équivalentes lorsqu'il existe $h \in \mathrm{Ker}(f)(A_0)$ tel que $s' = h.s.h^{-1}$. On dispose alors de l'interprétation suivante :

***Proposition* 2.2.2**. – *Si H est un $\mathscr{A}$-foncteur en G-groupes, alors on a une bijection naturelle d'ensembles pointés :*

$$H^1_{\mathrm{coc}}(G,H) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sect}_{\mathscr{A}}(H \rtimes G \xrightarrow{\pi} G)$$

où $\pi : H \rtimes G \to G$ est la seconde projection.

Démonstration. – Définissons deux applications $H^1_{\mathrm{coc}}(G,H) \to \mathrm{Sect}_{\mathscr{A}}(H \rtimes G \xrightarrow{\pi} G)$ et $\mathrm{Sect}_{\mathscr{A}}(H \rtimes G \xrightarrow{\pi} G) \to H^1_{\mathrm{coc}}(G,H)$: pour la première, on associe à un morphisme croisé $\varphi : G \to H$ la section (multiplicative) $s : g \mapsto (\varphi(g), g)$ de π. Pour la seconde, on associe à une section $s : G \to H \rtimes G$ de π le morphisme croisé $\varphi : g \mapsto \mathrm{pr}_H(s(g))$, où $\mathrm{pr}_H : H \rtimes G \to H$ est la projection sur le premier facteur. On vérifie alors aisément que ces deux applications sont réciproques l'une de l'autre. Cela conclut la preuve. $\square$

2.3. Degré 2. – On rappelle que si H est un foncteur en groupes, alors $\mathrm{Aut\,ext}(H)$ désigne le foncteur des automorphismes extérieurs de H, i.e. $\mathrm{Aut\,ext}(H)(A) := \mathrm{Aut}(H(A))/\mathrm{Int}(H(A))$.

***Définition* 2.3.1**. – Une structure de $\mathscr{A}$-foncteur en G-groupes extérieurs sur H est la donnée d'un morphisme de $\mathscr{A}$-foncteurs en groupes $\varphi : G \to \mathrm{Aut\,ext}(H)$.

***Remarque* 2.3.2**. – Cela revient à se donner une famille de morphismes de groupes $G(A) \to \mathrm{Aut\,ext}(H(A))$, fonctoriellement en A.

***Définition* 2.3.3**. – Soit H un $\mathscr{A}$-foncteur en G-groupes extérieurs. Un 2-cocycle sur G à valeurs dans H est un couple (f,g) de morphismes de foncteurs $f : G \to \mathrm{Aut}(H)$ et $g : G \times G \to H$, vérifiant les conditions suivantes (pour tout $A \in \mathscr{A}$ et tout $s,t,u \in G(A)$) :

$$\begin{cases} f \bmod \mathrm{Int}(H) = \varphi \\ f_s \circ f_t = \mathrm{int}(g_{s,t}) \circ f_{st} \\ f_s(g_{t,u}).g_{s,tu} = g_{s,t}.g_{st,u}\,. \end{cases}$$

On note $Z^2(G,H)$ l'ensemble des 2-cocycles.

***Définition* 2.3.4.** – Deux 2-cocycles (f,g) et (f',g') sont dits équivalents s'il existe un morphisme de foncteurs $h : G \to H$ tel que

$$\begin{cases} f'_s &= \mathrm{int}(h_s) \circ f_s \\ g'_{s,t} &= h_s f_s(h_t) g_{s,t} h_{st}^{-1}\,. \end{cases}$$

La classe d'équivalence d'un élément $(f,g) \in Z^2(G,H)$ est notée $[(f,g)]$. L'ensemble des classes d'équivalence est noté $H^2_{\mathrm{coc}}(G,H)$.

Un 2-cocycle (f,g) est dit neutre si $g_{s,t} = 1$ pour tout $s,t \in G$. Une classe $\alpha \in H^2_{\mathrm{coc}}(G,H)$ est dite neutre si elle est représentée par un 2-cocycle neutre.

L'ensemble $H^2_{\mathrm{coc}}(G,H)$ est ainsi un ensemble marqué par les classes neutres.

Comparons l'ensemble $H^2_{\mathrm{coc}}(G,H)$ avec l'ensemble des classes d'extensions de G par H.

***Définition* 2.3.5.** – Soit H un $\mathscr{A}$-foncteur en G-groupes extérieurs. Notons $\varphi : G \to \mathrm{Aut\,ext}(H)$ l'action extérieure de G sur H. Une φ-extension de G par H est une suite exacte courte de $\mathscr{A}$-foncteurs en groupes

$$1 \to H \to E \to G \to 1$$

(i.e. pour tout $A \in \mathscr{A}$, la suite $1 \to H(A) \to E(A) \to G(A) \to 1$ est exacte) telle que

- le morphisme $E \to G$ soit scindé comme morphisme de foncteurs.
- l'action extérieure de G sur H induite par cette suite exacte soit φ.

On note $\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}(G,H;\varphi)$ l'ensemble des classes d'équivalence de telles extensions, où deux extensions E et E' sont dites équivalentes s'il existe un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & H \arrow[r] \arrow[d, "="] & E \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d, "="] & 1 \\ 1 \arrow[r] & H \arrow[r] & E' \arrow[r] & G \arrow[r] & 1\,. \end{tikzcd}$$

L'ensemble $\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}(G,H;\varphi)$ est marqué par les classes d'extensions scindées.

***Proposition* 2.3.6.** – *Il existe un isomorphisme naturel d'ensembles marqués :*

$$\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}(G,H;\varphi) \xrightarrow{\sim} H^2_{\mathrm{coc}}(G,H)\,.$$

Démonstration. – Commençons par construire le morphisme : soit

$$1 \to H \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} G \to 1$$

une φ-extension de G par H. Soit ϵ une section (fonctorielle) de π. On définit $f : G \to \mathrm{Aut}(H)$ et $g : G \times G \to H$ par les formules suivantes : $f_s := \mathrm{int}(\epsilon(s))$ et $g_{s,t} := \epsilon(s).\epsilon(t).\epsilon(s.t)^{-1}$. On vérifie que $(f,g) \in Z^2(G,H)$, et que sa classe dans $H^2_{\mathrm{coc}}(G,H)$ ne dépend pas de la section ϵ choisie. Enfin, deux φ-extensions équivalentes conduisent à la même classe dans $H^2_{\mathrm{coc}}(G,H)$. On a donc défini l'application $\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}(G,H;\varphi) \to H^2_{\mathrm{coc}}(G,H)$.