La règle des signes de Tits

Michel Demazure

Panoramas et Synthèses

Numéro 47

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

Panoramas & Synthèses
47, 2015, p. 1–14

LA RÈGLE DES SIGNES DE TITS

par

Michel Demazure

Résumé. – Cette note explicite la remarque 6.7 de l'exposé XXIII de SGA3 ([**5**], p. 322 et [**6**], p. 219), sous la forme d'une relecture des exposés XX et XXIII, à la lumière de l'article de Tits [**9**] cité dans cette remarque.

***Abstract* (Tits' sign rule).** – This note is an explicitation of remark 6.7 in *Exposé* XXIII of SGA3 ([**5**] et [**6**]). We will re-read *Exposés* XX and XXIII and recover Tits' commutation rule, as given in [**9**].

1. Introduction

Les deux percées dues à Chevalley, construisant les groupes semi-simples sur les corps finis ([**2**]), puis sur $\mathbf{Z}$ ([**3**]), sont basées sur l'existence de bases spécifiques des algèbres de Lie semi-simples complexes, dont les constantes de structure sont entières. De façon plus précise et avec les notations habituelles, Chevalley démontre qu'on peut choisir des éléments radiciels X_α de façon que les relations de commutation soient de la forme $[X_\alpha, X_\beta] = \pm pX_{\alpha+\beta}$, où p est un entier (en fait 1, 2, ou 3) déterminé par la position géométrique des racines α et β.

Cela ouvre le « problème des signes » : déterminer le signe des relations précédentes impliquerait l'unicité à isomorphisme près d'une algèbre de Lie de système de racines donné et même, *modulo* la vérification de l'identité de Jacobi, l'existence d'une telle algèbre. C'est ce programme que Tits mène à bien dans l'article [**9**].

En fait, cet article et la première édition de SGA3 sont contemporains (1964) et, à l'époque, j'ai bénéficié de nombreuses conversations avec Tits sur ce thème. Dans la mesure où toutes les constantes de structure des groupes déployés de rang 2 sont données explicitement dans l'exposé XXIII, il était clair que la *règle des signes* de Tits devait pouvoir se déduire de ces formules explicites, ce qui explique l'allusion

***Classification mathématique par sujets* (2010).** – 14L15, 14L30.
Mots clefs. – Règle des signes, constantes de structure, schémas de Chevalley.

© Panoramas et Synthèses 47, SMF 2015

faite dans la remarque 6.7 de cet exposé (avec la référence à [**9**], complétée dans la seconde édition [**6**]). Ce qui suit est la solution de cet exercice.

Un mot d'histoire pour terminer. La convention $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$ était systématiquement utilisée par les spécialistes lorsque j'ai rédigé l'exposé XX et je me suis attaché à la respecter. Mais Tits a justement montré que ce choix ne permettait pas de résoudre le problème des signes et qu'il fallait prendre au contraire la convention $[X_{-\alpha}, X_\alpha] = H_\alpha$, qui s'est imposée par la suite (voir par exemple [**1**], chap. VIII, §2, n° 4, définition 3). Comme je l'ai dit ci-dessus, je l'ai appris de lui lorsque je rédigeais l'exposé XXIII, mais il était alors trop tard pour modifier l'exposé XX déjà tapé, la production par dactylographie ne permettant pas ce genre de retouches *a posteriori* qui sont si simples maintenant. Je n'ai donc rien changé dans SGA3, mais j'ai modifié avec la « bonne » convention les formules dans le résumé qui a constitué officiellement ma thèse ([**4**], soutenue en novembre 1964 et reproduite en tête de la réédition [**6**]).

Je remercie Patrick Polo et les *referees* pour leurs corrections et leurs suggestions.

2. Groupes de rang un

2.1. Notations générales. – Dans toute la suite, on note S un schéma, G un S-groupe réductif. On note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G ; c'est un $\mathcal{O}_S$-module localement libre, sur lequel G (et chacun de ses sous-groupes) opère par la représentation adjointe.

Pour éviter des circonlocutions inessentielles, nous supposerons S connexe et non vide, de façon à pouvoir identifier un S-schéma constant à l'ensemble de ses sections.

On note $\mathbf{O}$ le schéma en anneaux structural de S, de sorte que $\mathbf{G}_a = (\mathbf{G}_a)_S$ est le groupe additif de $\mathbf{O}$ et $\mathbf{G}_m = (\mathbf{G}_m)_S$ est le groupe multiplicatif de $\mathbf{O}$.

2.2. Groupes radiciels. – Supposons que G possède un tore maximal T (« défini sur S ») et une racine α relativement à T. Par définition, $\alpha : T \to \mathbf{G}_m$ est un caractère de T et le sous-espace propre $\mathfrak{g}_\alpha$ est localement libre de rang 1.

Alors, notant additivement le dual de T, le caractère $-\alpha$ est aussi une racine de G relativement à T.

On note Z_α le centralisateur du noyau de α. C'est un S-groupe réductif de rang 1, dont T est un tore maximal et dont l'algèbre de Lie est la somme directe

$$\mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}_\alpha.$$

Considérons le fibré vectoriel $W(\mathfrak{g}_\alpha)$ de rang 1 et l'application exponentielle $W(\mathfrak{g}_\alpha) \to Z_\alpha$ (voir SGA3, XX, 1.5, (i), page 38/29[(1)]). Elle induit un isomorphisme de $W(\mathfrak{g}_\alpha)$ sur un sous-groupe fermé de G, que l'on note U_α. On transporte à U_α la structure de $\mathbf{O}$-Module de $W(\mathfrak{g}_\alpha)$. Comme on note multiplicativement la structure

(1) Pour faciliter la lecture, les renvois à SGA3 sont accompagnés de « page x/y », où x est le numéro de la page de [**5**] et y le numéro de la page de [**6**].

de groupe de G, donc de U_α, on notera exponentiellement l'opération externe de $\mathbf{O}$, de sorte qu'on aura notamment

$$tut^{-1} = u^{\alpha(t)},$$

pour tous points t et T et u de U_α (ici et dans la suite, l'expression « point » signifie : point à valeurs dans un S-schéma S' quelconque). On fait de même pour la racine opposée.

2.3. Structure. – On a alors (XX, 1.5, (ii), *ibidem*) :

Proposition 2.1. – *Le morphisme $(v,t,u) \mapsto v \cdot t \cdot u$ de $U_{-\alpha} \times T \times U_\alpha$ dans G induit un isomorphisme de $U_{-\alpha} \times T \times U_\alpha$ sur un sous-schéma ouvert Ω_α de Z_α.*

En outre (XX 2.5 formule (F), page 56/42, après changement de signe de l'accouplement) :

Théorème 2.2. – *Considérons le morphisme $(u,v) \mapsto u \cdot v$ de $U_\alpha \times U_{-\alpha}$ dans G. Il existe un accouplement $\mathbf{O}$-bilinéaire $U_\alpha \times U_{-\alpha} \to \mathbf{O}$, noté $(u,v) \to \langle u,v \rangle$, et un cocaractère $\alpha^* : \mathbf{G}_m \to T$, uniquement déterminés, tels que l'image réciproque de Ω_α par le morphisme précédent soit l'ouvert défini par la condition « $1 - \langle u,v \rangle$ est inversible » et qu'on ait alors, posant $z = 1 - \langle u,v \rangle$,*

$$u \cdot v = v^{z^{-1}} \cdot \alpha^*(z) \cdot u^{z^{-1}}. \tag{1}$$

On a $\langle \alpha^*, \alpha \rangle = 2$, c'est-à-dire $\alpha(\alpha^*(x)) = x^2$ pour tout point x de $\mathbf{G}_m$.

On dira que des points u de U_α et v de $U_{-\alpha}$ sont *appariés* si l'on a $\langle u,v \rangle = 1$. On notera que :

1. Cette normalisation diffère de celle de XX, 2.6.1, page 57/42, à cause du changement de signe. Elle mérite, vu les vertus que nous lui verrons ci-dessous, d'être appelée *normalisation de Tits*.
2. Du coup, l'appariement a une signification géométrique : si u et v sont appariés, $u \cdot v$ est « universellement hors de Ω_α ».
3. L'accouplement est « symétrique » : si on inverse les rôles de α et $-\alpha$, on a $\langle v,u \rangle = \langle u,v \rangle$ (XX, 2.9, page 57/43).
4. La version infinitésimale de l'appariement est la relation $[X_{-\alpha}, X_\alpha] = H_\alpha$ (cf. XX, 2.11, page 58/43).

Supposons donnés $u \in U_\alpha(S)$ et $v \in U_{-\alpha}(S)$, appariés. Alors u est «universellement non nul », donc le $\mathbf{O}$-Module U_α est libre de base u, ce qui l'identifie à $\mathbf{G}_a$ et de même pour $U_{-\alpha}$. On voit alors, comme dans XX, 5.8, page 77/56, qu'il existe un unique morphisme de S-groupes $f : (SL_2)_S \to G$ tel que

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = u, \quad f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right) = v \tag{2}$$

et on a, pour tout point z de $\mathbf{G}_m$

$$f\left(\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix}\right) = \alpha^*(z). \tag{3}$$

En outre, l'image de f est le groupe dérivé $S_\alpha = D(Z_\alpha)$ de Z_α. L'image de la coracine $\alpha^* : \mathbf{G}_m \to T$ est le tore maximal $T \cap S_\alpha$ de S_α. Le noyau de f est le noyau de α^* ; ainsi, pour que f induise un isomorphisme de $(SL_2)_S$ sur S_α ou, ce qui est équivalent, que S_α soit simplement connexe, il faut et il suffit que α^* soit indivisible dans M^*, c'est-à-dire n'appartienne pas à $2M^*$ (noter que α^* ne peut être divisible que par 2, puisque $(\alpha^*, \alpha) = 2$).

Un calcul brutal dans SL_2 donne :

Proposition 2.3. – *Supposons donnés deux sections appariées $u \in U_\alpha(S)$ et $v \in U_{-\alpha}(S)$. On a $uvu = vuv = f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$, $(uv)^3 = \alpha^*(-1)$ et $(uv)^6 = e$.*

Posons

$$w = uvu = vuv \in S_\alpha(S). \tag{4}$$

On notera que la normalisation de Tits implique que w « ne change pas lorsqu'on échange u et v », ce qui contraste avec XX, 3.1, (vi), page 60/45. C'est un point dans S du normalisateur de T dans Z_α et le quotient $N_{Z_\alpha}(T)/T$ est le S-groupe constant à deux éléments dont l'image de w est « l'autre section » (cf. XX, 3.1,*ibidem*) : on a

$$wtw^{-1} = s_\alpha(t) = t \cdot \alpha^*(\alpha(t)^{-1}) \tag{5}$$

pour tout point t de T.

De la proposition, on déduit tout le formulaire :

1. $w^2 = \alpha^*(-1)$, car $w^2 = (uvu)(vuv) = (uv)^3$,
2. $wuw^{-1} = v$, car $wu = (vuv)u = v(uvu) = vw$,
3. $wvw^{-1} = u$, *idem*,
4. $(wu)^3 = e$, car $wu = (vuv)u = (vu)^2$,
5. $(wv)^3 = e$, *idem*.

Notons aussi :

Proposition 2.4. – *Supposons u et v appariés et soit $w = uvu$. Soit a un point de $\mathbf{G}_m$. Alors u^a et $v^{1/a}$ sont appariés et l'on a $u^a v^{1/a} u^a = \alpha^*(a)w = w\alpha^*(1/a)$.*

Démonstration. On peut, soit faire le calcul dans $(SL_2)_S$, soit transformer la situation par un automorphisme intérieur déduit d'un point t de T, qui remplace u par $u^{\alpha(t)}$, v par $v^{1/\alpha(t)}$ et w par $twt^{-1} = twt^{-1}w^{-1}w = \alpha^*(\alpha(t))w$. □

En particulier, u^{-1} et v^{-1} sont appariés et donnent l'élément w^{-1}.