Sur la classification des schémas en groupes semi-simples

Philippe Gille

Panoramas et Synthèses

Numéro 47

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

Panoramas & Synthèses
47, 2015, p. 39–110

SUR LA CLASSIFICATION DES SCHÉMAS EN GROUPES SEMI-SIMPLES

par

Philippe Gille

Résumé. – Nous abordons la classification des schémas en groupes semi-simples du point de vue cohomologique et immobilier à la Bruhat-Tits afin de généraliser les techniques galoisiennes sur un corps à des anneaux plus généraux. Cela amène à étudier la notion de réductibilité pour les schémas en groupes réductifs en lien avec les sous-groupes à un paramètre. De plus, on travaille avec des schémas en groupes affines lisses G non nécessairement connexes mais à composante neutre réductive, ce qui nous conduit à étudier les normalisateurs de sous-groupes paraboliques de G^0 et leurs espaces principaux homogènes. Enfin, l'exposé contient en appendice des analogies pour les schémas en groupes de Weyl et les données radicielles tordues.

***Abstract* (On the classification of semisimple group schemes).** – We deal with the classification of semisimple group schemes via the Bruhat-Tits' presentation of non-abelian cohomology. The goal is to generalize Galois techniques to more general rings. It leads us to investigate the concept of reducibility for reductive group schemes with special attention to one parameter subgroups. It requires also the study of parabolic subgroups and their normalizers of a not-necessarily connected affine smooth group scheme G whose neutral component G^0 is reductive. The text discusses in an appendix also certain analogies for Weyl group schemes and twisted root data.

1. Introduction

Soit k un corps. La théorie de Borel-Tits [**3, 36**] produit une classification des groupes algébriques semi-simples sur le corps k, à partir d'invariants discrets (le type absolu, l'indice de Tits) et d'invariants « arithmétiques » qui sont des classes de cohomologie galoisienne du corps k.

***Classification mathématique par sujets* (2010).** – 14L15, 14L30.
Mots clefs. – Schémas en groupes, sous-groupes paraboliques, isotropie, réductibilité, données radicielles.

L'auteur a bénéficié du soutien du projet IDEI PCE_2012-4-364 du Ministère de l'Éducation Nationale de Roumanie CNCS-UEFISCIDI.

Donnons un exemple pour illustrer ce propos. Si (q, V) désigne un espace quadratique non dégénéré (k de caractéristique impaire pour simplifier) avec V de dimension $2n$, le groupe spécial orthogonal $G = \mathrm{SO}(q)$ admet comme premier invariant son type absolu, i.e. D_n. Un second invariant est le discriminant de q, c'est une classe de $k^\times/(k^\times)^2$ qui correspond à la $*$-action du groupe de Galois sur le diagramme de Dynkin D_n et qui détermine la forme quasi-déployée de G. Le théorème de Witt est la décomposition (essentiellement unique) $q = q_0 \perp \mathbb{H}^{\nu(q)}$, où q_0 est une forme quadratique anisotrope, $\mathbb{H}$ le plan hyperbolique et $\nu(q)$ l'indice de Witt de q. Par exemple, dans le cas d'une forme interne (i.e. de discriminant trivial), l'indice de Tits de G est alors

$({}^1D^{(1)}_{n,\nu(q)})$

Cela signifie que G admet un sous-groupe parabolique minimal de type $D_n \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_{\nu(q)}\}$; pour les autres cas, voir les tables de [**36**]. La forme quadratique q_0 donne lieu au k-groupe anisotrope $\mathrm{SO}(q_0)$, qui est un sous-groupe de Levi d'un tel parabolique minimal et qui est appelée le noyau anisotrope de G. La décomposition de Witt-Tits donne la forme générale de cette construction.

Soit S un schéma. Notre objectif principal est de revenir sur le §XXVI de [**13**], portant sur les sous-schémas en groupes paraboliques, en tentant de se rapprocher du point de vue de Borel-Tits. Nous abordons ainsi la classification des groupes semi-simples avec la cohomologie étale et revenons sur la réductibilité principalement dans le cas d'une base semi-locale connexe pour laquelle on dispose du théorème de conjugaison pour les sous-groupes paraboliques minimaux de Demazure (XXVI.5.2).

Cet objectif est atteint au §4 : pour un schéma semi-local connexe (non vide), on a une décomposition de Witt-Tits de l'ensemble de cohomologie étale $\mathrm{H}^1(S, \mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}}(G))$ classifiant les S-formes d'un S-schéma en groupes semi-simples G. Cette décomposition est semblable au cas des corps [**36**] et est formulée de façon analogue à la décomposition de Bruhat-Tits de la cohomologie galoisienne des groupes définis sur le corps des fractions d'un anneau de valuation discrète hensélien [**8**].

Ceci demande des préparatifs, intéressants pour eux-mêmes. La classification des S-schémas en groupes semi-simples du point de vue de la cohomologie étale fait intervenir les schémas en groupes d'automorphismes $\mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}}(G)$. Un tel schéma en groupes n'est en général pas à fibres connexes et il est commode d'étendre la théorie des schémas en groupes paraboliques pour des schémas en groupes lisses dont la composante neutre est réductive (§3).

La notion principale dans les décompositions de Witt-Tits est celle de *réductibilité*. Un S-schéma en groupes réductifs G est réductible s'il admet un couple (P, L) où P est un S-schéma en groupes paraboliques partout propres de G et L un sous-groupe de Levi de P. On étudie cette notion pour elle-même, notamment son comportement par extension centrale et son lien avec la notion d'isotropie.

On montre (sur S connexe ou affine) qu'un tel couple (P, L) provient par la construction de sous-groupes limites associés à un homomorphisme $\lambda : \mathbb{G}_{m,S} \to G$

(Th. 7.3.1) généralisant le cas des corps [**34**, §15.1]. En particulier, le sous-groupe de Levi L est le centralisateur de λ.

Passons en revue le plan de l'article. La section 2 est l'occasion de revenir sur des généralités pour la cohomologie non abélienne, en faisant un compromis entre les techniques galoisiennes omniprésentes en pratique et le cadre très général du livre de Giraud [**17**]. Dans la section 3, on revient sur les sous-groupes paraboliques d'un S-schéma en groupes réductifs G et sur leurs groupes de Levi. On s'intéresse notamment aux normalisateurs d'un sous-schéma en groupes paraboliques dans d'autres schémas en groupes, comme $\mathrm{Aut}_{\mathrm{gr}}(G)$.

La décomposition de Witt-Tits est l'objet de la section 4 et on l'applique au cas du groupe des automorphismes d'un groupe de Chevalley au §5.

L'objet principal du §7 est la démonstration du résultat mentionné sur la description des couples (P, L) pour un S-schéma en groupes réductifs G avec des homomorphismes $\mathbb{G}_m \to G$. Ce développement requiert une étude de nature combinatoire de cohomologie des groupes faite en appendice (§9) ainsi que des rappels sur les données radicielles tordues (§6).

A la fin, on montre comment deux invariants classiques des groupes algébriques semi-simples ($*$-action, classe de Tits) se généralisent pour des schémas en groupes semi-simples sur une base arbitraire.

En appendice, on étudie la cohomologie des schémas en groupes de Weyl du point de vue précédent, c'est-à-dire « immobilier ». L'analogie groupes algébriques/groupes de Weyl et immeubles sphériques/complexes de Coxeter est en effet remarquable.

Les notations XXII.4.1, VI_B.10.2, etc. renvoient au séminaire sur les schémas en groupes de Demazure-Grothendieck [**13**].

Remerciements. – En premier lieu, je remercie vivement Brian Conrad pour ses nombreuses précisions, améliorations et suggestions apportées au manuscrit (par exemple le §2.8, le lemme 4.4.1, la Définition 6.1.2.(2),...) qui contenaient en germe la caractérisation des couples (P, L).

La démonstration des assertions (1) et (2) de la proposition 3.4.5 est due à Bas Edixhoven, je le remercie chaleureusement.

Je tiens à remercier aussi Vladimir Chernousov, Cyril Demarche, Cristian Gonzales-Aviles, Ting-Yu Lee, Arturo Pianzola, ainsi que les rapporteurs pour leurs commentaires bienvenus.

2. Préliminaires

Soit S un schéma.

2.1. Faisceaux principaux homogènes, produits contractés et cohomologie non-abélienne. – Les quelques faits ci-dessous sont bien connus en cohomologie galoisienne (e.g. [**33**, §2.2, lemme 1]), on se propose de les généraliser pour la cohomologie fppf (i.e. plate) sur le schéma de base S en utilisant principalement le livre de Giraud [**17**].

On travaille avec des faisceaux d'ensembles et de groupes sur le grand site plat (i.e. fppf) de S pour lequel on renvoie à l'exposé [**6**, §1.2] et à [**38**, §2]. Les recouvrements pour la (pré)-topologie fppf sur la catégorie des S-schémas sont les familles de morphismes $(U_i \to U)_{\in I}$ tel quel le morphisme $\bigsqcup\limits_{i \in I} U_i \to U$ est fidèlement plat localement de présentation finie.

On note $\underline{\mathrm{e}}$ le S-faisceau singleton, c'est-à-dire défini par $\underline{\mathrm{e}}(T) = \{\bullet\}$ pour tout $T \to S$. C'est l'objet final de la catégorie des S-faisceaux fppf d'ensembles. De plus, si $\underline{\mathrm{F}}$ est un S-faisceau, on a une bijection naturelle $\mathrm{Hom}_{S-\mathrm{faisc}}(\underline{\mathrm{e}}, \underline{\mathrm{F}}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{F}}(S)$. Dans un sens elle associe à un morphisme $u : \underline{\mathrm{e}} \to \underline{\mathrm{F}}$ l'image du point par $u_S : \underline{\mathrm{e}}(S) \to \underline{\mathrm{F}}(S)$; dans l'autre, elle associe à une section $f \in \underline{\mathrm{F}}(S)$ le morphisme constant associé à f, $\underline{\mathrm{e}} \to \underline{\mathrm{F}}$, qui pour tout T au-dessus de S applique $\underline{\mathrm{e}}(S)$ sur l'image de f par la restriction $\underline{\mathrm{F}}(S) \to \underline{\mathrm{F}}(T)$.

Si $\underline{\mathrm{E}}, \underline{\mathrm{F}}$ sont des S-faisceaux fppf d'ensembles, on note $\underline{\mathrm{Hom}}(\underline{\mathrm{E}}, \underline{\mathrm{F}})$ le S-foncteur des homomorphismes de S-foncteurs de $\underline{\mathrm{E}}$ dans $\underline{\mathrm{F}}$ (I.7), c'est un S-faisceau fppf (IV.4.5.13). On définit le sous-objet $\underline{\mathrm{Isom}}(E, F)$ de $\underline{\mathrm{Hom}}(\underline{\mathrm{E}}, \underline{\mathrm{F}})$ par $\underline{\mathrm{Hom}}(\underline{\mathrm{E}}, \underline{\mathrm{F}})(S') = \mathrm{Isom}(E_{S'}, F_{S'}) \subseteq \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{\mathrm{E}}, \underline{\mathrm{F}})(S')$; c'est un S-sous-faisceau. On note $\underline{\mathrm{Aut}}(E) = \underline{\mathrm{Isom}}(\underline{\mathrm{E}}, \underline{\mathrm{E}})$, c'est un S-faisceau en groupes.

Si $\underline{\mathrm{E}}$, $\underline{\mathrm{F}}$ ont des structures supplémentaires(1) (par exemple groupes, etc.), on peut considèrer les sous-faisceaux $\underline{\mathrm{Hom}}(\underline{\mathrm{E}}, \underline{\mathrm{F}})$ et $\underline{\mathrm{Isom}}(\underline{\mathrm{E}}, \underline{\mathrm{F}})$ qui préservent cette structure ; dans le cas des groupes, on note $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{gr}}(\underline{\mathrm{E}}, \underline{\mathrm{F}})$.

Soit $\underline{G}$ un S-faisceau fppf en groupes. On note $\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{gr}}(\underline{G}) \subseteq \underline{\mathrm{Aut}}(G)$ le S-faisceau fppf des automorphismes de groupes. L'action de conjugaison de $\underline{G}$ sur lui-même définit un morphisme de S-faisceaux fppf

$$\mathrm{int} : \underline{G} \to \underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{gr}}(\underline{G}).$$

Le noyau de int est le S-faisceau centre $\underline{\mathrm{Cent}}(\underline{G})$ de $\underline{G}$ et le S-faisceau image de int est un S-sous-faisceau distingué de $\underline{\mathrm{Aut}}_{\mathrm{gr}}(\underline{G})$ appelé le sous S-faisceau des automorphismes intérieurs. Le S-faisceau conoyau de int est noté $\underline{\mathrm{Aut\,ext}}_{\mathrm{gr}}(\underline{G})$; ce S-faisceau est appelé le S-faisceau en groupes des automorphismes extérieurs de $\underline{G}$. Si $\underline{X}$ (resp. $\underline{Y}$) est un S-faisceau muni d'une action à droite (resp. de $\underline{G}$), le *produit contracté* de $\underline{X}$ et $\underline{Y}$ selon $\underline{G}$ est le S-faisceau quotient $\underline{X} \times \underline{Y}$ pour l'action à droite de $\underline{G}$ selon $(x, y) \,.\, g) = (x \,.\, g \,,\, g^{-1} \,.\, y)$, voir [**17**, III.1.3]. On le note $\underline{X} \wedge^{\underline{G}} \underline{Y}$ ou parfois aussi $\underline{X} \times^{\underline{G}} \underline{Y}$.

(1) Voir [**9**, 2.1] pour des sorites dans cette direction.