TITRE ABSENT

Christine Lescop

Panoramas et Synthèses

Numéro 48

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

Panoramas & Synthèses
48, 2016, p. 1–31

INTRODUCTION À QUELQUES INVARIANTS DES VARIÉTÉS DE DIMENSION 3 ET DE LEURS ENTRELACS

par

Christine Lescop

Résumé. – En introduction à ce volume, on propose une présentation partielle, accessible à des non-spécialistes, du contexte dans lequel s'inscrivent les cours proposés sur la conjecture AJ, l'homologie de Khovanov et l'homologie de Heegaard-Floer.

***Abstract* (Introduction to some invariants of links and 3-manifolds).** – This volume includes three series of lectures—on the AJ conjecture, on Khovanov homology and on Heegaard Floer homology—and by way of introduction we present here a partial, historical survey, which aims to provide some background and context for the non-specialist.

En introduction à ce volume, on propose une présentation partielle, accessible à des non-spécialistes, du contexte dans lequel s'inscrivent les cours proposés. On y énonce quelques résultats phares et quelques étapes clés de l'évolution de l'étude des variétés et de leurs invariants, plus spécialement en dimension 3 et 4. On commence par passer en revue et comparer différentes définitions de variétés (topologiques, différentiables...) et par redéfinir rapidement les invariants de base de topologie algébrique que sont le groupe fondamental, l'homologie et l'intersection homologique. On cite ensuite la classification de Freedman des variétés topologiques fermées orientables simplement connexes de dimension 4 et le théorème de Donaldson sur les variétés différentiables de dimension 4. Puis on décrit des manières de décomposer et de présenter les variétés fermées orientables de dimension 3, avant de présenter quelques-uns de leurs invariants qui ont été définis dans les trente dernières années, en commençant par les invariants dits quantiques qui généralisent le polynôme de

***Classification mathématique par sujets* (2000).** – 57M27 57M25 57N10.
Mots clefs. – Homologie de Khovanov, conjecture AJ, homologie de Heegaard Floer, nœuds, entrelacs, polynôme de Jones, variétés de dimension 3, homologies de Floer, invariants de Donaldson.

Je remercie Michel Boileau, Lucien Guillou, Robert Lipshitz, Delphine Moussard, Luisa Paoluzzi, Paul Turner et le rapporteur pour leurs commentaires et leurs corrections sur ce texte.

Jones, et en terminant par les invariants de type homologie de Floer qui s'étendent aux cobordismes de dimension 4 entre variétés de dimension 3, en des généralisations d'invariants de Donaldson des variétés différentiables de dimension 4.

1. Sur les structures des variétés

Dans cette partie, on redéfinit les notions de variétés topologiques, lisses, linéaires par morceaux, triangulables. On relie ensuite ces notions, qui coïncident jusqu'en dimension 3, mais pas en dimension plus grande.

Soit n un entier. Une *variété topologique* de dimension n est un espace topologique séparé, que l'on peut munir d'un recouvrement dénombrable par des ouverts homéomorphes à des ouverts de $\mathbb{R}^n$. Une *carte* d'un ouvert U d'un tel recouvrement est un homéomorphisme ϕ_U de U dans son image dans $\mathbb{R}^n$. Un *atlas* est l'ensemble des cartes d'un tel recouvrement. Un *changement de cartes* entre deux cartes (U, ϕ_U) et (V, ϕ_V) est un homéomorphisme $\tau_{U,V} = \phi_V \circ \phi_U^{-1}$ de $\phi_U(U \cap V)$ dans $\phi_V(V \cap U)$.

Si, dans un tel atlas, les changements de cartes sont de classe C^i (i fois différentiables et tels que les dérivées d'ordre i sont continues) pour un $i \in \{0, 1, 2, \ldots, \infty\}$, l'atlas est dit de classe C^i. Deux atlas de classe C^i sont dits *compatibles* si leur réunion est encore un atlas de classe C^i. Une *structure* C^i sur une variété est une classe d'équivalence d'atlas C^i compatibles. Une variété C^i est une variété munie d'une structure C^i.

On définit les *variétés à bord* de dimension n, en remplaçant le modèle local $\mathbb{R}^n$ ci-dessus par le demi-espace $(\mathbb{R}^n)^- = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1 \leq 0\}$ dont le bord est $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$. Le *bord de la variété* est constitué des points envoyés sur le bord de $(\mathbb{R}^n)^-$ par les cartes. Les applications C^i entre deux variétés de classes C^i se définissent naturellement à partir des cartes. Un homéomorphisme C^k dont le jacobien est partout non nul entre deux variétés est appelé *difféomorphisme* C^k.

Les travaux de Whitney [**97**] en 1936 ont montré que, pour tout entier naturel n et pour tout entier i strictement positif, toute variété C^i de dimension n admet une unique structure C^∞ C^i-compatible. On utilisera dorénavant les mots *lisse* ou *différentiable* comme synonymes de C^∞.

On définit une variété *linéaire par morceaux* ou *PL*, en remplaçant C^i par linéaire par morceaux ou PL dans les définitions ci-dessus. Les variétés PL admettent des *triangulations*, c'est-à-dire qu'elles s'écrivent comme réunions de simplexes de dimension n (enveloppes convexes de $(n+1)$ points affinement indépendants dans $\mathbb{R}^n$) telles que l'intersection de deux simplexes soit une face (l'enveloppe convexe de k sommets pour $k \leq n+1$) de chacun des simplexes. En dimension au plus 4, on sait (seulement depuis la démonstration de la conjecture de Poincaré en dimension 3, pour la dimension 4) que toute triangulation provient d'une structure linéaire par morceaux, mais ce n'est plus vrai à partir de la dimension 5. Dès la dimension 5, il existe des variétés topologiques qui admettent des triangulations mais qui ne sont pas linéaires par morceaux [**78**, exemple p. 24].

Ciprian Manolescu vient de démontrer l'existence de variétés topologiques qui n'admettent même pas de triangulation, en toute dimension supérieure à 5 [**55**, Corollary 1.3]. Cette question avait été ramenée dans les années 70 à une question sur l'invariant de Rohlin des variétés de dimension 3 dont on parlera plus tard. Manolescu a répondu à cette question au moyen d'une variante de l'homologie de Floer de Seiberg-Witten qu'il a introduite. En 1970, Robion Kirby et Laurent Siebenmann avaient aussi utilisé l'invariant de Rohlin pour montrer qu'il existe des variétés topologiques en toute dimension supérieure ou égale à 5 qui n'admettent pas de structure PL [**39**]. L'introduction du livre d'Andrew Ranicki [**78**] donne un excellent exposé sur ces questions liées à la Hauptvermutung.

Dans les années 30, les travaux de Stewart Cairns [**10**] et de J. H. C. Whitehead [**96**] ont montré l'existence d'une structure PL canonique sur les variétés C^1.

La sphère unité S^n de l'espace $\mathbb{R}^{n+1}$ est un exemple de variété. Elle admet une structure lisse naturelle et une structure PL naturelle. Mais la sphère S^7 admet plusieurs autres structures lisses, comme Milnor l'a montré en 1956 [**58**] en utilisant les travaux de René Thom sur le cobordisme [**89**] pour les distinguer. La sphère S^7 a en fait 28 structures lisses [**35**], la sphère S^{31} en a au moins 16 millions [**59**]. Chaque sphère (sauf peut-être S^4) a un nombre fini de structures lisses explicitement calculé en 1963 par Michel Kervaire et John Milnor jusqu'en dimension 18 dans [**35**].

Pour les variétés de dimension au plus 3, toutes les classes de variétés citées coïncident. En d'autres termes pour la dimension 3, toute variété topologique de dimension 3 a une unique structure linéaire par morceaux — c'est un théorème daté de 1952 d'Edwin Moise [**62**] — et une unique structure lisse. L'existence et l'unicité de la structure lisse en dimension 3 sont la conséquence des résultats suivants qui s'organisent dans le triangle ci-dessous.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{C}^1 \arrow[rr, two heads, "{[10, 96]}", "{[11]}"'] \arrow[dr, hook, "{[64]}"] & & \mathrm{PL} \arrow[dl, "\cong\ {[62]}"] \\
& \mathrm{Top} &
\end{tikzcd}$$

Cairns a montré [**11**, Theorem III] en 1940 que l'association d'une structure PL à une structure C^1, construite dans [**10**] et [**96**], est surjective dans le cas de la dimension 3. Le théorème de Moise cité ci-dessus montrait ainsi que toute variété topologique de dimension 3 a une structure C^1. James Munkres [**64**, Theorem 6.3] a prouvé l'unicité d'une telle structure en 1960.

L'article de survol de Nicolaas Kuiper [**46**] donne plus de détails sur ces questions.

2. Quelques invariants de base de la topologie algébrique

Dans cette partie, on redéfinit rapidement le groupe fondamental et l'homologie, et on rappelle la classification des surfaces.

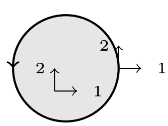
Commençons par rappeler la définition du groupe fondamental, dont l'étude a été initiée par Henri Poincaré dans son Analysis Situs publié en 1895 [**75, 76**, §12].

On appelle *lacet* d'un espace topologique X basé en un point $*$ de X une application continue $\gamma\colon [0,1] \to X$ telle que $\gamma(\{0,1\}) = *$. Deux tels lacets γ et γ' sont dits *homotopes* s'il existe une application continue $h\colon [0,1] \times [0,1] \to X$ telle que $h([0,1] \times \{0,1\}) = \{*\}$, la restriction $h_{|\{0\}\times[0,1]}$ de h à $\{0\} \times [0,1]$ est γ et $h_{|\{1\}\times[0,1]} = \gamma'$. « Être homotope » est une relation d'équivalence. Le *groupe fondamental* $\pi_1(X,*)$ d'un espace topologique X muni d'un point base $* \in X$ est l'ensemble des classes d'équivalence des lacets basés en $*$ pour cette relation. Pour deux lacets γ et γ', le produit $[\gamma][\gamma']$ est la classe d'homotopie du lacet

$$\begin{array}{rccl} \gamma\gamma'\colon & [0,1] & \to & X \\ & t & \mapsto & \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } t \le 1/2 \\ \gamma'(2t-1) & \text{si } t \ge 1/2. \end{cases} \end{array}$$

Deux éléments x et y de X sont dits *connectés par un arc* s'il existe une application continue $\alpha\colon [0,1] \to X$ telle que $\alpha(0) = x$ et $\alpha(1) = y$. Pour deux éléments x et y de X ainsi connectés, $\pi_1(X,x)$ est isomorphe à $\pi_1(X,y)$. X est *connexe par arcs* si deux points quelconques de X sont connectés par un arc. Si X est connexe par arcs, la classe d'isomorphisme de $\pi_1(X,*)$ est indépendante du point base, et $\pi_1(X,*)$ est noté simplement $\pi_1(X)$.

Une *orientation* de $\mathbb{R}^n$ est la donnée d'une base ordonnée de $\mathbb{R}^n$, à changement de base de déterminant positif près. Une variété est dite *orientable*, si elle possède un atlas pour lequel les changements de cartes préservent l'orientation (c'est-à-dire que le déterminant de la matrice jacobienne est positif en tout point, dans le cas différentiable). Une *orientation* est alors une classe d'équivalence d'atlas compatibles pour l'orientation. Intuitivement, dans le cas différentiable, une orientation est induite par la donnée continue d'une base ordonnée de l'espace tangent en chaque point, à changement de base de déterminant positif près. Le bord d'une variété orientée est orienté par la convention de « la normale extérieure en premier ». Autrement dit, dans le cas différentiable, le vecteur normal extérieur à la variété suivi d'une base ordonnée de l'espace tangent du bord en un point oriente la variété en ce point.



L'homologie d'une variété triangulée, aussi étudiée dans l'Analysis Situs de Poincaré [**75, 76**], se définit très simplement à partir du *complexe simplicial* associé à la triangulation. Ce complexe est la suite graduée de $\mathbb{Z}$-modules $(C_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ munie de