Séminaire BOURBAKI Janvier 2018
70ème année, 2017-2018, n° 1143, p. 289 à 308
doi:10.24033/ast.1087

DES POINTS VORTEX AUX ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES [d'après P.-E. Jabin et Z. Wang]

par **Laure SAINT-RAYMOND**

INTRODUCTION

Le problème considéré ici est une question classique en mécanique statistique : il s'agit de décrire le comportement asymptotique d'un système de particules identiques en interaction, quand le nombre de ces particules N est très grand, i.e. d'obtenir une **loi des grands nombres** pour des variables qui ne sont pas complètement indépendantes.

En régime de champ moyen, les interactions des particules deux à deux sont relativement faibles et ce n'est que parce qu'on en fait la somme qu'on obtient un effet macroscopique. En particulier, on s'attend à pouvoir négliger les corrélations d'un nombre fini de particules fixées (propriété de chaos), et à décrire le comportement asymptotique uniquement en termes de la fonction de distribution à une particule (équation de champ moyen). Cette heuristique montre néanmoins que la propriété de chaos et l'équation de champ moyen vont être d'autant plus difficiles à obtenir que **l'interaction microscopique est singulière**. Le cas des vortex qui sera discuté ici correspond à une interaction en $1/|x|$ au voisinage de l'origine.

L'étude des états d'équilibre de ce système a fait l'objet de très nombreux travaux, référencés souvent sous l'appellation de log-gaz en référence au potentiel d'interaction qui est logarithmique, et dont certains concernent en fait les statistiques de matrices aléatoires (voir par exemple [**6, 14, 2, 3, 15**]). La plupart de ces travaux s'appuient sur des formulations variationnelles du problème. En effet, à température nulle, les équilibres minimisent l'énergie du système. À température positive, on introduit l'entropie pour tenir compte des effets d'agitation thermique (fonctionnelle de déviation) et on peut se ramener aussi à un problème de minimisation pour l'énergie libre. Le cas dynamique auquel on s'intéresse ici est plus délicat car les **équations d'évolution** n'ont pas cette structure variationnelle. On verra néanmoins que l'entropie joue un rôle important dans la preuve, car elle mesure – en un certain sens – la stabilité du système.

1. LA LIMITE DE CHAMP MOYEN

1.1. Dynamique stochastique des points vortex

Le point de départ est le système de points vortex sur le tore de dimension 2

$$dX_i = \frac{1}{N}\sum_{j\neq i} K(X_i - X_j)dt + \sqrt{2\sigma_N}dW_i, \qquad i = 1, \dots, N \tag{1}$$

où K est le noyau de Biot-Savart, i.e. le noyau de l'opérateur $-\nabla^\perp(-\Delta)^{-1}$ sur le tore

$$K(x) = \alpha\frac{x^\perp}{|x|^2} + K_0(x) \text{ avec } K_0 \text{ régulier.}$$

Par définition, la vitesse d'advection $u_i(X_i)$ du vortex i satisfait

$$\nabla^\perp \cdot u_i = \frac{1}{N}\sum_{j\neq i}\delta_{X_j} \quad \text{ et } \quad \nabla\cdot u_i = 0.$$

Le flot est donc incompressible et le rotationnel du champ de vitesses est donné par la distribution empirique des vortex.

Les Browniens W_i, qui sont supposés indépendants, introduisent une diffusion autour des trajectoires déterministes, qui peut être interprétée comme une agitation thermique. Les vortex correspondent en effet à des « macro-particules » de fluide qui n'ont pas de réalité physique et qui sont elles-mêmes constituées de nombreuses molécules avec une distribution de vitesses qui n'est en général pas monocinétique.

Remarque 1.1. — Ici, pour étudier la limite de champ moyen, on doit supposer que toutes les particules sont échangeables, donc la vorticité associée à chaque point vortex est identiquement égale à 1. Si on voulait traiter le cas d'une vorticité signée, il faudrait considérer deux espèces avec vorticité ± 1. L'existence même de solutions pour le système est alors beaucoup plus délicate car elle nécessite de contrôler les possibles collisions entre vortex (voir **[17]** par exemple).

Le système d'équations différentielles stochastiques (1) doit être complété par une donnée initiale $(X_i(0))_{1\leq i\leq N}$ qui peut être fixée, ou obéir à une loi de probabilité qu'on se donne. On considérera plutôt ce second cas, et on imposera que les différentes positions sont indépendantes et identiquement distribuées.

Remarque 1.2. — Dans le cas d'un domaine à bord, il faut prescrire en outre l'interaction des vortex avec le bord. La phénoménologie de cette interaction est complexe, et la condition qui assurerait le non-glissement $u = 0$ au bord est non locale et non linéaire.

En l'absence de bruit, il est facile de voir que le système de points vortex est une forme de discrétisation (qui est d'ailleurs utilisée pour certaines simulations numériques [**12**]) de l'équation d'Euler 2D

$$\partial_t u + u \cdot \nabla u + \nabla p = 0, \qquad \nabla \cdot u = 0,$$

équation qui se réécrit en formulation vorticité

$$\partial_t \rho + u \cdot \nabla \rho = 0, \qquad u = \int_{\Pi^2} K(x-y)\rho(y)dy. \tag{2}$$

En effet, si on définit la mesure empirique du système de vortex par

$$\mu_N(t) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta_{X_i(t)}$$

on obtient que

$$\partial_t \mu_N + \nabla \cdot (K * \mu_N \mu_N) = 0$$

puisque le terme d'auto-corrélation s'annule par symétrie :

$$\begin{aligned}\partial_t \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \varphi(X_i) &= -\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \nabla\varphi(X_i) \cdot \frac{1}{N}\sum_{j\neq i} K(X_i - X_j)\\ &= \frac{1}{2N^2}\sum_{i,j=1}^{N} K(X_i - X_j)\cdot(\nabla\varphi(X_i) - \nabla\varphi(X_j)).\end{aligned}$$

Le bruit introduit un terme supplémentaire de diffusion que l'on calcule par intégration stochastique. On obtient ainsi que

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \varphi(X_i(t)) - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \varphi(X_i(0))) - \sigma_N \int_0^t \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \Delta\varphi(X_i)\right)\\ - \int_0^t \frac{1}{2N^2}\sum_{i,j=1}^{N} K(X_i - X_j)\cdot(\nabla\varphi(X_i) - \nabla\varphi(X_j)) = M_N(t)\end{aligned}$$

où M_N est une martingale. De façon très informelle, on a donc en prenant l'espérance

$$\partial_t \mathbb{E}[\mu_N] + \nabla \cdot (K * \mathbb{E}[\mu_N]\mathbb{E}[\mu_N]) - \sigma_N \Delta \mathbb{E}[\mu_N] = 0$$

qui est la formulation en vorticité des équations de Navier-Stokes 2D

$$\partial_t \rho + u \cdot \nabla \rho = \sigma \Delta \rho, \qquad u = \int_{\Pi^2} K(x-y)\rho(y)dy. \tag{3}$$

Comme dans le cas déterministe, la singularité du noyau de Biot-Savart ne permet d'obtenir la consistance de l'approximation que dans un sens très faible, c'est-à-dire pour des fonctions tests φ très régulières.

1.2. Stabilité des équations de Navier-Stokes 2D en formulation vorticité

Pour démontrer un résultat de convergence, il faut pouvoir assembler la consistance (i.e. le fait que le terme d'erreur dans l'équation est petit) et la stabilité (i.e. le fait que la solution de l'équation est peu sensible à une petite erreur dans l'équation) en trouvant un espace fonctionnel où on sait prouver ces deux propriétés. À cet égard, le cas avec diffusion est meilleur que le cas déterministe car on a la stabilité pour des perturbations peu régulières de l'équation (3).

L'idée est que le terme de dissipation dans l'inégalité d'énergie

$$\frac{1}{2}\|\rho(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \sigma\|\nabla\rho(s)\|_{L^2}^2 ds \leq \frac{1}{2}\|\rho_0\|_{L^2}^2$$

contrôle la régularité $L^2_t(H^1_x)$ de la solution, et permet donc de considérer des perturbations qui sont dans l'espace dual $L^2_t(H^{-1}_x)$. On obtient ainsi très facilement le résultat de stabilité faible suivant :

Proposition 1.3. — *Soient $\rho_0 \in L^2_x$, et (η_n) une suite convergeant vers 0 dans $L^2_t(H^{-1}_x)$. Pour tout n, on considère une solution ρ_n de l'équation perturbée*

$$\partial_t\rho_n + \nabla\cdot((K*\rho_n)\rho_n) = \sigma\Delta\rho_n + \eta_n, \qquad \rho_{n|t=0} = \rho_0.$$

Alors, la suite ρ_n converge fortement dans $L^2_{t,x}$ vers la solution de l'équation (3).

Démonstration. — De l'estimation d'énergie

$$\frac{1}{2}\|\rho_n(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \sigma\|\nabla\rho_n(s)\|_{L^2}^2 ds \leq \frac{1}{2}\|\rho_0\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\eta_n(s)\|_{H^{-1}}\|\rho_n(s)\|_{H^1} ds$$

on déduit la borne uniforme

$$\frac{1}{2}\|\rho_n(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\int_0^t \sigma\|\nabla\rho_n(s)\|_{L^2}^2 ds \leq \frac{1}{2}\|\rho_0\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2\sigma}\int_0^t \|\eta_n(s)\|_{H^{-1}}^2 ds.$$

Ceci, couplé avec l'estimation sur $\partial_t\rho_n$ donnée par l'équation d'évolution, montre la compacité de la suite (ρ_n) dans $L^2_{t,x}$. Il suffit alors de passer à la limite au sens des distributions dans l'équation perturbée pour obtenir (3). On conclut grâce à l'unicité de la solution de (3). □

La convergence peut en fait se quantifier, et on a le résultat de stabilité forte suivant :

Proposition 1.4. — *Soient $\rho_0 \in L^2_x$, et (η_n) une suite convergeant vers 0 dans $L^2_t(H^{-1}_x)$. Pour tout n, on considère une solution ρ_n de l'équation perturbée*

$$\partial_t \rho_n + \nabla \cdot ((K * \rho_n)\rho_n) = \sigma \Delta \rho_n + \eta_n, \qquad \rho_{n|t=0} = \rho_0.$$

Alors,

$$\|(\rho_n - \rho)(t)\|^2_{L^2} \leq \frac{2}{\sigma} \int_0^t \|\eta_n(s)\|^2_{H^{-1}} \exp\left(\frac{2}{\sigma}\int_s^t \|\nabla\rho(s')\|^2_{L^2}\right) ds',$$

où ρ est la solution de l'équation (3).

Démonstration. — La différence $\delta_n = \rho_n - \rho$ satisfait l'équation

$$\partial_t \delta_n + (K * \rho_n) \cdot \nabla \delta_n - \sigma \Delta \delta_n = \eta_n - (K * \delta_n) \cdot \nabla \rho$$

d'où l'on déduit que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|\delta_n(t)\|^2_{L^2} &+ \int_0^t \sigma \|\nabla \delta_n(s)\|^2_{L^2} ds \\
&\leq \int_0^t \left(\|\eta_n(s)\|_{H^{-1}} \|\delta_n(s)\|_{H^1} + \|\nabla\rho(s)\|_{L^2} \|\delta_n(s)\|^2_{L^4}\right) ds \\
&\leq \int_0^t \frac{\sigma}{2} \|\nabla \delta_n(s)\|^2_{L^2} ds + \frac{2}{\sigma}\int_0^t \|\eta_n(s)\|^2_{H^{-1}} ds + \frac{2}{\sigma}\int_0^t \|\nabla\rho(s)\|^2_{L^2} \|\delta_n(s)\|^2_{L^2} ds.
\end{aligned}$$

L'estimation de convergence s'obtient alors en appliquant le lemme de Gronwall. □

Remarque 1.5. — Dans le cas de l'équation (3), il est simple de contrôler la stabilité du terme non linéaire avec les estimations fournies par l'inégalité d'énergie. De façon générale, on peut obtenir un résultat de stabilité plus robuste autour des solutions régulières, dite stabilité fort-faible, en contrôlant simplement le terme de flux par $\|\nabla\rho\|_\infty \|\delta_n\|^2_{L^2}$.

On cherche alors à utiliser des propriétés analogues au niveau du système de vortex, i.e. à montrer que le terme de dissipation aide à contrôler la convergence.

1.3. Résultat de convergence

Une telle approche a été utilisée par Fournier, Hauray et Mischler [**9**] pour montrer la convergence en loi de la mesure empirique des vortex, et la propagation du chaos des chemins stochastiques.

Comme on ne cherche à décrire que des propriétés statistiques du système à t fixé, il est naturel d'introduire l'équation de Liouville associée au système d'équations différentielles stochastiques (1)

$$(4) \qquad \partial_t f_N + \sum_{i=1}^N \nabla_{x_i} \cdot \left(\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N K(x_i - x_j)\right) f_N\right) = \sum_{i=1}^N \sigma_N \, \Delta_{x_i} f_N.$$