Séminaire BOURBAKI Mars 2018
70e année, 2017–2018, nº 1144, p. 309 à 338
doi:10.24033/ast.1088

RELATIONS DE HODGE-RIEMANN ET COMBINATOIRE DES MATROÏDES [d'après K. Adiprasito, J. Huh et E. Katz]

par **Antoine CHAMBERT-LOIR**

... alors que le savant classe hors du temps vécu, situe et fixe à l'écart de la vie.

Philippe Jaccottet, *La semaison*

1. MATROÏDES

Inventée par Whitney [**50**], la notion de *matroïde* est une abstraction de la propriété d'indépendance linéaire. Elle admet plusieurs formalisations équivalentes, en termes de *bases*, de *parties libres*, de *circuits*, d'une *fonction rang*, etc. Nous utiliserons ici celle qui met en jeu le concept de *plat*.

DÉFINITION 1.1. — *Soit* E *un ensemble* fini. [(1)] *Un matroïde* M *sur* E *est la donnée d'une partie* $\mathscr{P}_{\mathrm{M}}$ *de* $\mathfrak{P}(\mathrm{E})$ — *les* plats *de* M — *vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) *L'intersection de toute famille de plats de* M *est un plat.*
(ii) *Pour tout plat* P *de* M*, distinct de* M*, l'ensemble des plats de* M *qui sont minimaux parmi ceux contenant strictement* P *recouvre* E*.*

On notera en général $|\mathrm{M}|$, voire M, l'ensemble sous-jacent à un matroïde M.

---

(1) Dans ce texte, il sera uniquement question de matroïdes finis. En fait, la formalisation des matroïdes sur un ensemble infini est récente : une condition naturelle consiste à imposer à la propriété d'être une partie libre d'être de caractère fini, mais Bruhn *at al.* [**13**] mettent en évidence qu'on obtient une classe plus intéressante de matroïdes infinis en imposant un axiome d'existence de parties libres maximales.

1.2. — Rappelons brièvement les autres formalisations de la notion de matroïde. en renvoyant à Welsh [**47**], White [**48, 49**] ou Oxley [**38**] pour plus de détails.

Soit M un matroïde sur un ensemble E. Muni de la relation d'inclusion sur $\mathfrak{P}(E)$, l'ensemble des plats de M est un ensemble ordonné. C'est un *treillis* : toute partie possède une borne inférieure (notée $\wedge$), l'intersection de ses membres, et une borne supérieure (notée $\vee$), l'intersection de la famille des plats de M qui contiennent chacun de ses membres. Si X est une partie de E, on note $\langle X\rangle$ le plat engendré par X, c'est-à-dire le plus petit plat de M qui contient X. Au matroïde M, on associe naturellement deux fonctions *rang* et *corang* : le rang $\mathrm{rg}_{M}(P)$ d'un plat P est la plus grande longueur d'une chaîne de plats de sommet P, son corang $\mathrm{corg}_{M}(P)$ est la plus grande longueur d'une chaîne de plats de base P. On définit plus généralement le rang (resp. le corang) d'une partie A de M comme celui du plat qu'elle engendre.

Une partie L de E est dite *liée* s'il existe une partie $L' \subsetneq L$ telle que $\langle L'\rangle = \langle L\rangle$; elle est dite *libre* sinon. L'ensemble des parties libres vérifient les propriétés suivantes :

(i) $\varnothing$ est libre ;
(ii) Toute partie d'une partie libre est libre ;
(iii) Si A et B sont des parties libres de M telles que $\mathrm{Card}(B) > \mathrm{Card}(A)$, il existe $x \in B - A$ tel que $A \cup \{x\}$ soit libre (variante du « lemme d'échange »).

Inversement, toute partie de $\mathfrak{P}(E)$ vérifiant ces trois propriétés est l'ensemble des parties libres d'un unique matroïde sur E.

Une *base* de M est une partie libre maximale. Il en existe ; on déduit du lemme d'échange que toutes les bases de M ont même cardinal et que toutes les chaînes maximales de plats ont même cardinal, égal au rang de M (c'est-à-dire du plat E de M). Autrement dit, pour tout plat P de M, on a $\mathrm{rg}_{M}(P) + \mathrm{corg}_{M}(P) = \mathrm{rg}_{M}(|M|)$ (le treillis associé à M est « caténaire »). De plus, pour tout couple (P, Q) de plats de M, on a la relation

$$\mathrm{rg}_{M}(P) + \mathrm{rg}_{M}(Q) \geqslant \mathrm{rg}_{M}(P \wedge Q) + \mathrm{rg}_{M}(P \vee Q)\ ; \tag{1.3}$$

le treillis associé à M est dit *sous-modulaire*. Inversement, tout treillis caténaire sous-modulaire est le treillis des plats d'un matroïde.

Exemple 1.4. — Soit V un espace vectoriel (resp. un espace affine, resp. un espace projectif) sur un corps K et soit $\Phi = (v_e)_{e\in E}$ une famille finie d'éléments de V. Il existe un matroïde M dont les plats sont les parties de E de la forme $\{e \in E\ ;\ v_e \in W\}$, où W parcourt l'ensemble des sous-espaces vectoriels (resp. affines, resp. projectifs) de V. Les parties libres de ce matroïde sont les sous-familles libres (resp. affinement libres, resp. projectivement libres) de Φ. Dans le cas vectoriel, le rang d'un plat P est la dimension de l'espace vectoriel engendré par la famille $(v_e)_{e\in P}$; dans le cas affine resp. (projectif), on a $\mathrm{rg}_{\mathrm{M}}(\varnothing) = 0$ et $\mathrm{rg}_{\mathrm{M}}(\mathrm{P}) - 1$ est la dimension du sous-espace affine (resp. projectif) de V engendré par la famille $(v_e)_{e\in\mathrm{P}}$.

De tels matroïdes sont dits *représentables* sur K.

Lorsqu'on prend pour Φ l'ensemble des points de l'espace projectif $\mathbf{P}_2(\mathbf{F}_2)$, on obtient le *matroïde de Fano*. Il n'est représentable que sur un corps de caractéristique 2.

Les matroïdes représentables apparaissent naturellement via l'arrangement d'hyperplans qu'ils définissent dans l'espace vectoriel dual $\mathrm{V}^{\vee}$ (resp. l'espace affine, resp. projectif). Les plats sont alors les intersections d'hyperplans de l'arrangement et leur rang est leur codimension.

D'après **[37]**, lorsque n tend vers l'infini, la proportion du nombre de matroïdes sur l'ensemble $\{1,\dots,n\}$ qui sont représentables (sur *un* corps non précisé) tend vers 0.

Exemple 1.5. — Soit G un graphe fini et soit E l'ensemble des arêtes de G. Il existe un unique matroïde M(G) sur E dont les parties libres sont les forêts de G. De manière équivalente, ses circuits, c'est-à-dire les parties liées minimales, sont les cycles dans le graphe G ; ses plats sont les parties P telles que les extrémités de toute arête $e \in \mathrm{E} \smallsetminus \mathrm{P}$ n'appartiennent pas à la même composante connexe du sous-graphe de G ayant même ensemble de sommets que G et P pour ensemble d'arêtes.

Si G_{P} est le plus grand sous-graphe de G dont l'ensemble d'arêtes est P, $\mathrm{rg}_{\mathrm{M(G)}}(\mathrm{P}) + \mathrm{Card}(\pi_0(\mathrm{G}_{\mathrm{P}}))$ est le nombre de sommets de G.

Le matroïde M(G) est représentable sur tout corps. Soit S l'ensemble des sommets de G. Soit K un corps et notons (x_s) la base canonique du K-espace vectoriel K^{S}. Fixons une orientation F de G et identifions une flèche $f \in \mathrm{F}$ à l'arête correspondante $\{f, \overline{f}\}$. Pour toute flèche $f \in \mathrm{F}$ d'origine o et de terme t, posons $v_f = x_t - x_o \in \mathrm{K}^{\mathrm{S}}$. Alors le matroïde associé à la famille $(v_f)_{f\in\mathrm{F}}$ s'identifie au matroïde M(G).

1.6. — Mentionnons quelques autres constructions de matroïdes.

a) Soit M_1 et M_2 des matroïdes. Il existe alors un unique matroïde M sur l'ensemble $|\mathrm{M}_1| \coprod |\mathrm{M}_2|$ dont les plats sont les réunions d'un plat de M_1 et d'un plat de M_2. On le note $\mathrm{M}_1 \oplus \mathrm{M}_2$.

b) Soit M un matroïde. Il existe, sur l'ensemble $|\mathrm{M}|$, une unique structure de matroïde dont les bases sont les complémentaires des bases de M. On l'appelle le *matroïde dual* M^* de M. Sa fonction rang est liée à celle de M par la relation

$$\mathrm{rg}_{\mathrm{M}^*}(\mathrm{A}) - \mathrm{rg}_{\mathrm{M}}(|\mathrm{M}| \smallsetminus \mathrm{A}) = \mathrm{Card}(|\mathrm{M}|) - r_{\mathrm{M}}(|\mathrm{M}|),$$

pour toute partie A de $|\mathrm{M}|$.

c) Soit M un matroïde et soit F une partie de $|\mathrm{M}|$. L'ensemble des plats de M qui sont contenus dans F est une structure de matroïde sur F, que l'on note $\mathrm{M} \,|\, \mathrm{F}$; c'est la *restriction* de M à F ; on la voit aussi comme la *suppression* de $|\mathrm{M}| - \mathrm{F}$ dans M et on la note alors $\mathrm{M}\backslash(|\mathrm{M}|-\mathrm{F})$. Sa fonction rang est la restriction à $\mathfrak{P}(\mathrm{F})$ de la fonction rang de M.

d) Soit M un matroïde et soit F une partie de $|\mathrm{M}|$. L'ensemble des parties P de $|\mathrm{M}| - \mathrm{F}$ telles que $\mathrm{P} \cup \mathrm{F}$ soit un plat de M est une structure de matroïde sur l'ensemble $|\mathrm{M}|-\mathrm{F}$; autrement dit, le treillis de ses plats est le sous-treillis de $\mathscr{P}_{\mathrm{M}}$ formé des plats de M qui contiennent F. On l'appelle la *contraction* de F dans M et on la note M/F. Sa fonction rang vérifie $\mathrm{rg}_{\mathrm{M/F}}(\mathrm{A}) = \mathrm{rg}_{\mathrm{M}}(\mathrm{A} \cup \mathrm{F}) - \mathrm{rg}_{\mathrm{M}}(\mathrm{A})$, pour toute partie A de $|\mathrm{M}| - \mathrm{F}$.

1.7. — Soit M un matroïde. Une boucle de M est un point $e \in |\mathrm{M}|$ qui appartient à tout plat. Soit $m = \langle \varnothing \rangle$ le plus petit plat de M. Le matroïde contracté M/m est sans boucle et a même treillis des plats que M.

Supposons M sans boucle. La relation $\langle x \rangle = \langle y \rangle$ dans E est une relation d'équivalence dont les classes d'équivalence sont les plats de M de rang 1. Lorsque ces classes d'équivalence sont réduites à un élément, on dit que le matroïde est une *géométrie combinatoire.* En général, le matroïde M induit une géométrie combinatoire $\overline{\mathrm{M}}$ sur l'ensemble quotient $\overline{\mathrm{E}}$; la surjection canonique de E sur $\overline{\mathrm{E}}$ induit un isomorphisme du treillis des plats de M sur celui de $\overline{\mathrm{M}}$.

Définition 1.8. — *Soit* M *un matroïde. Le* polynôme caractéristique *de* M *est défini par*

$$\chi_{\mathrm{M}}(\mathrm{T}) = \sum_{\mathrm{A} \subset |\mathrm{M}|} (-1)^{\mathrm{Card}(\mathrm{A})} \mathrm{T}^{\mathrm{corg}_{\mathrm{M}}(\langle \mathrm{A} \rangle)}.$$

C'est un polynôme unitaire de degré $\leqslant \mathrm{rg}(\mathrm{M})$. Lorsque $|\mathrm{M}|$ est vide, on a $\chi_{\mathrm{M}}(\mathrm{T}) = 1$. Il y a deux matroïdes sur un ensemble $\{e\}$ de cardinal 1 : si $\mathscr{P}_{\mathrm{M}} = \{\varnothing, |\mathrm{M}|\}$, on a $\mathrm{rg}(\mathrm{M}) = 1$ et $\chi_{\mathrm{M}}(\mathrm{T}) = \mathrm{T} - 1$; si $\mathscr{P}_{\mathrm{M}} = \{|\mathrm{M}|\}$, on a $\mathrm{rg}(\mathrm{M}) = 0$ et $\chi_{\mathrm{M}}(\mathrm{T}) = 0$. En général, le polynôme $\chi_{\mathrm{M}}(\mathrm{T})$ se calcule par récurrence à partir des deux règles :

$$\chi_{\mathrm{M}_1 \oplus \mathrm{M}_2}(\mathrm{T}) = \chi_{\mathrm{M}_1}(\mathrm{T}) \chi_{\mathrm{M}_2}(\mathrm{T})$$

et

$$\chi_{\mathrm{M}}(\mathrm{T}) = \chi_{\mathrm{M}\backslash e}(\mathrm{T}) - \chi_{\mathrm{M}/e}(\mathrm{T})$$

pour tout point $e \in |\mathrm{M}|$ qui n'appartient pas à toute base de M. (Ces deux règles généralisent celles qui régissent le polynôme chromatique d'un graphe.)

Si $|\mathrm{M}|$ n'est pas vide, on a $\chi_{\mathrm{M}}(1) = 0$; on définit alors le polynôme caractéristique réduit par :

$$\overline{\chi_{\mathrm{M}}}(\mathrm{T}) = \chi_{\mathrm{M}}(\mathrm{T})/(\mathrm{T} - 1).$$

Exemple 1.9. — Supposons que M soit le matroïde M(G) associé à un graphe fini G. Alors, pour tout entier q,

$$\chi_{\mathrm{G}}(\mathrm{T}) = \mathrm{T}^{\mathrm{Card}(\pi_0(\mathrm{G}))}\chi_{\mathrm{M}}(\mathrm{T})$$

est le polynôme chromatique de G : pour tout entier q, $\chi_{\mathrm{G}}(q)$ est le nombre de coloriages de l'ensemble des sommets de G avec q couleurs tels que deux sommets reliés par une arête soient de couleurs distinctes.

Exemple 1.10. — Soit K un corps, soit n un entier, soit $(v_1, \dots, v_r)$ une famille libre de K^n et soit V le sous-espace vectoriel de K^n qu'elle engendre. Notons M le matroïde représentable correspondant. Le polynôme caractéristique de M s'interprète géométriquement dans l'anneau de Grothendieck $\mathrm{K}_0(\mathrm{Var}_{\mathrm{K}})$ des K-variétés.

Rappelons que cet anneau est défini comme le quotient du groupe abélien libre sur l'ensemble $\mathrm{Var}_{\mathrm{K}}$ des classes d'isomorphie de K-variétés (= K-schémas de type fini) par la relation de découpage $[\mathrm{X}] = [\mathrm{X} - \mathrm{Y}] + [\mathrm{Y}]$ si X est une K-variété et Y un fermé de X, muni du produit $[\mathrm{X}][\mathrm{Y}] = [\mathrm{X} \times_{\mathrm{K}} \mathrm{Y}]$. Si X est une K-variété, on note $\mathrm{e}(\mathrm{X})$ sa classe dans $\mathrm{K}_0(\mathrm{Var}_{\mathrm{K}})$. L'application e est une caractéristique d'Euler universelle. En particulier, lorsque $\mathrm{K} = \mathbf{C}$, l'application qui, à une $\mathbf{C}$-variété V, associe son polynôme de Hodge-Deligne $\mathrm{E}_{\mathrm{V}}(u, v)$, se factorise par un homomorphisme d'anneaux de $\mathrm{K}_0(\mathrm{Var}_{\mathbf{C}})$ dans $\mathbf{Z}[u, v]$. De même, lorsque K est un corps fini, l'application qui, à une K-variété V, associe le cardinal de V(K), se factorise par un homomorphisme d'anneaux de $\mathrm{K}_0(\mathrm{Var}_{\mathrm{K}})$ dans $\mathbf{Z}$.

Notons $\mathbf{L} = \mathrm{e}(\mathbf{A}^1_{\mathrm{K}})$ la classe de la droite affine. Dans l'anneau de Grothendieck $\mathrm{K}_0(\mathrm{Var}_{\mathrm{K}})$ des K-variétés, on a alors la relation

$$\mathrm{e}(\mathrm{V} \cap \mathbf{G}^n_{\mathrm{m},\mathrm{K}}) = \chi_{\mathrm{M}}(\mathbf{L}).$$

(Cela se déduit de la formule d'inversion de Möbius dans le treillis des plats du matroïde M et de la formule (2.7) ; voir plus bas.) Comme l'unique homomorphisme d'anneaux de $\mathbf{Z}[\mathrm{T}]$ dans $\mathrm{K}_0(\mathrm{Var}_{\mathrm{K}})$ qui applique T sur $\mathbf{L}$ est injectif, cette relation caractérise χ_{M}.

Lorsque $\mathrm{K} = \mathbf{C}$, le polynôme de Hodge-Deligne de la variété quasi-projective $\mathrm{V} \cap (\mathbf{C}^\times)^n$ est donc égal à $\chi_{\mathrm{M}}(uv)$. Lorsque $\mathrm{K} = \mathbf{F}_q$ est un corps fini de cardinal q, on a de même $\mathrm{Card}(\mathrm{V} \cap (\mathrm{K}^\times)^n) = \chi_{\mathrm{M}}(q)$.

En passant au quotient par l'action par homothéties de $\mathbf{G}_{\mathrm{m},\mathrm{K}}$ sur l'espace affine $\mathbf{A}^n_{\mathrm{K}}$, on en déduit aussi une interprétation géométrique du polynôme caractéristique réduit de M :

$$\mathrm{e}(\mathbf{P}(\mathrm{V} \cap \mathbf{G}^n_{\mathrm{m},\mathrm{K}})) = \overline{\chi_{\mathrm{M}}}(\mathbf{L}).$$

Voici le théorème principal de cet exposé :