Séminaire BOURBAKI Mars 2018
70^e année, 2017–2018, n^o 1145, p. 339 à 378
doi:10.24033/ast.1089

DYNAMIQUE DE L'ÉQUATION DE SCHRÖDINGER SUR LE DISQUE [d'après N. Anantharaman, M. Léautaud et F. Macià]

par **Gabriel RIVIÈRE**

INTRODUCTION

Le régime semi-classique de la mécanique quantique est un régime où la constante de Planck est négligeable devant les autres actions physiques mises en jeu dans le système. À la limite, le système considéré est alors régi par les équations de la mécanique classique et on s'attend à ce que la nature du système classique associé (par exemple, chaotique *vs.* intégrable) se reflète dans le comportement du système quantique. D'un point de vue mathématique, ce type d'asymptotique est au cœur de ce qu'on appelle l'analyse microlocale dont le champ d'applications est extrêmement varié : théorie spectrale, équations aux dérivées partielles, topologie symplectique, systèmes dynamiques hyperboliques, géométrie aléatoire, etc. L'objet de cet exposé est l'étude de problématiques de géométrie spectrale et d'équations aux dérivées partielles à travers cette perspective. Précisément, nous discuterons les propriétés des solutions de l'équation de Schrödinger dans la limite semi-classique de la mécanique quantique. Un cas particulier important est celui des vecteurs propres du Laplacien ou plus généralement de l'opérateur de Schrödinger sur une variété compacte lorsque la valeur propre tend vers l'infini. De ce point de vue, il s'agit de questions typiques de géométrie spectrale qui ont fait l'objet d'une grande attention ces quarante dernières années notamment en lien avec le problème de l'ergodicité quantique que nous décrirons brièvement. Dans ce texte, nous mettrons plutôt l'accent sur la situation opposée, à savoir celle des systèmes complètement intégrables et, à travers les exemples du tore et du disque, nous essayerons de comprendre de manière fine la dynamique de l'équation de Schrödinger.

1. LE CAS STATIONNAIRE

1.1. Mesures semi-classiques

Présentons maintenant un peu plus précisément les objets de notre étude. Pour simplifier, on se limite dans cette première partie au cas d'une variété M qui est lisse ($\mathscr{C}^\infty$), compacte et *sans bord*. On suppose aussi cette variété connexe, orientée et munie d'une métrique riemannienne g lisse et on note $d \geq 1$ sa dimension. Un cas particulier du problème que l'on va étudier est l'équation suivante :

$$\left(-\frac{\Delta_g}{2} + V\right)\psi_\lambda = \lambda\psi_\lambda, \quad \|\psi_\lambda\|_{L^2} = 1, \tag{1}$$

où Δ_g est l'opérateur de Laplace-Beltrami (ou laplacien) associé à la métrique g, où V appartient [(1)] à $\mathscr{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ et où l'espace L^2 est défini par rapport au volume riemannien. Sous nos hypothèses, on sait [**70**, Th. 14.7] qu'il existe une base orthonormée $(e_j)_{j\geq 0}$ de $L^2(M)$ composée de fonctions $\mathscr{C}^\infty$ et une suite croissante $(\lambda_j)_{j\geq 0}$ tendant vers $+\infty$ telles que

$$\forall j \geq 0, \quad \left(-\frac{\Delta_g}{2} + V\right)e_j = \lambda_j e_j.$$

À part dans certains cas très particuliers [(2)], on n'a en général pas d'expression explicite de ces fonctions et il est naturel de chercher à les décrire. Du point de vue physique, les solutions de (1) sont des états stationnaires de l'équation de Schrödinger :

$$i\partial_t u = -\frac{\Delta_g}{2}u + Vu, \quad u(t=0) = \psi \in L^2(M).$$

Les valeurs propres λ représentent l'énergie de l'état quantique ψ_λ [**25**, § 2.5] et l'objet de cet exposé est l'étude de la limite où les états quantiques sont de plus en plus « excités », *i.e.* $\lambda \to +\infty$. Le principe de correspondance affirme que, dans ce régime asymptotique, les propriétés des états quantiques seront régies par celles du système classique sous-jacent [**25**, § 7.4], ici le flot géodésique sur le fibré cotangent T^*M. On parle alors de limite *semi-classique* de la mécanique quantique.

L'objet de cette note est d'étudier les propriétés de concentration de ces états stationnaires ou plus généralement des solutions de l'équation de Schrödinger dans cette limite. Rappelons qu'il s'agit de fonctions lisses et notre but est de comprendre si ces solutions peuvent développer asymptotiquement des singularités. Afin de mesurer ceci, nous allons étudier ces états quantiques à travers des mesures de probabilité qui leur sont naturellement associées. Précisément, pour toute solution de (1), on pose

$$d\nu_\lambda(x) := |\psi_\lambda(x)|^2 d\mathrm{Vol}_g(x),$$

(1) Dans tout l'exposé, on suppose le potentiel lisse mais une grande partie des résultats resteraient valables sous des hypothèses de régularité plus faibles.
(2) Par exemple, si $V \equiv 0$ et si M est un tore ou une sphère (munis de leurs métriques canoniques).

où Vol_g est le volume riemannien associé à g. Du point de vue de la mécanique quantique, cette mesure représente la probabilité de trouver en x une particule dans l'état ψ_λ. Nous nous intéressons au comportement asymptotique de ces mesures et nous notons $\mathcal{N}(\infty)$ l'ensemble des points d'accumulation de la suite de mesures $(\nu_{\lambda_j})_{j\geq 0}$ lorsque $\lambda_j \to +\infty$.

Afin d'étudier cet ensemble, il est utile de relever ces mesures de probabilité en des distributions sur le fibré cotangent T^*M. Ce type de construction apparaît déjà dans les travaux de Wigner [**64**] et porte parfois le nom de *distribution de Wigner*. D'un point de vue mathématique, ceci nécessite de faire appel à la notion d'opérateurs pseudo-différentiels [**70**, Ch. 4]. On définit, pour $\lambda > 0$,

$$\mu_\lambda : \mathcal{C}_c^\infty(T^*M) \ni a \mapsto \left\langle \psi_\lambda, \mathrm{Op}_{\lambda^{-\frac{1}{2}}}(a)\psi_\lambda \right\rangle_{L^2} \in \mathbb{C},$$

où $\mathrm{Op}_{\lambda^{-\frac{1}{2}}}(a)$ est un opérateur pseudo-différentiel (semi-classique) de symbole principal a. Notons que, si l'on étend la définition à des fonctions a dans $\mathcal{C}^\infty(M)$, on a $\langle \mu_\lambda, a\rangle = \langle \nu_\lambda, a\rangle$ et cet objet encode plus d'information que ν_λ. Dans la littérature mathématique, ce type de quantités apparaît par exemple dans le théorème d'ergodicité quantique sur lequel nous reviendrons au paragraphe suivant. Leur étude systématique pour les problèmes d'équations aux dérivées partielles est due à Tartar [**61**], Gérard [**27, 26**], Lions-Paul [**44**], etc. Nous renvoyons par exemple à l'article de Burq dans ce même séminaire pour plus de précisions à ce sujet [**12**]. Le théorème de Calderón-Vaillancourt [**70**, Th. 4.23] nous assure que la suite μ_λ est bornée dans $\mathcal{D}'(T^*M)$. Nous notons $\mathcal{M}(\infty)$ l'ensemble de ses points d'accumulation lorsque $\lambda \to +\infty$. Les éléments de $\mathcal{M}(\infty)$ sont appelés les *mesures semi-classiques* de l'opérateur de Schrödinger. Les théorèmes d'analyse semi-classique nous permettent en effet de démontrer [**70**, Ch. 5] que tout élément μ de $\mathcal{M}(\infty)$ est une *mesure de probabilité à support dans le fibré unitaire cotangent S^*M et invariante par le flot géodésique*

$$\varphi^t : T^*M \to T^*M.$$

Les mesures de probabilité invariantes peuvent être régulières (mesure de Liouville) ou très singulières (mesure portée par une géodésique fermée). L'une des questions au cœur de cet exposé est d'essayer de caractériser parmi elles les mesures semi-classiques. Autrement dit, quelles mesures invariantes peuvent effectivement être obtenues comme limites de fonctions propres de l'opérateur de Schrödinger ? On cherche notamment à comprendre leur régularité. Finalement, pour faire le lien avec l'ensemble plus simple $\mathcal{N}(\infty)$, mentionnons que l'on a

$$\mathcal{N}(\infty) = \left\{ \int_{S_x^*M} \mu(x, d\xi) : \mu \in \mathcal{M}(\infty) \right\}.$$

Pour illustrer le principe de correspondance semi-classique et l'influence de la dynamique du flot géodésique sur la structure des fonctions propres, nous décrivons maintenant quelques propriétés connues de ces mesures semi-classiques dans trois cadres dynamiques assez distincts.

1.2. Le cas des variétés à courbure négative

Commençons par le cas historique des variétés à courbure strictement négative. Il s'agit du cadre diamétralement opposé à celui qui occupera le reste de l'exposé au sens où le flot géodésique est dans ce cas ergodique pour la mesure de Liouville sur S^*M. En utilisant cette propriété dynamique et la loi de Weyl microlocale, Šnirel′man **[60]**, Zelditch **[67]** et Colin de Verdière **[17]** démontrent la propriété dite d'*ergodicité quantique* : étant donnée une base orthonormée $(e_j)_{j\geq 0}$ de solutions de (1), on peut trouver $S \subset \mathbb{N}$ de densité 1 tel que

$$(2)\quad \forall a \in \mathcal{C}^0(M), \qquad \lim_{j\to+\infty, j\in S} \int_M a(x)|e_j(x)|^2 d\mathrm{Vol}_g(x) = \frac{1}{\mathrm{Vol}_g(M)} \int_M a(x) d\mathrm{Vol}_g(x).$$

Autrement dit, le volume riemannien est un élément de $\mathcal{N}(\infty)$ et la plupart des fonctions propres d'une base orthonormée ont tendance à s'équidistribuer sur M. Le résultat s'étend en fait aux distributions de Wigner :

$$(3) \qquad \forall a \in \mathcal{C}_c^\infty(T^*M), \qquad \lim_{j\to+\infty, j\in S} \langle \mu_{\lambda_j}, a\rangle = \int_{S^*M} a(x,\xi) dL(x,\xi),$$

où L est la désintégration de la mesure de Liouville sur S^*M. Ce théorème est à la base de la conjecture d'unique ergodicité quantique de Rudnick et Sarnak **[56]** qui affirme que l'on n'a en fait pas besoin d'extraire une sous suite, *i.e.* $S = \mathbb{N}$. Cette conjecture reste largement ouverte même si de nombreux résultats ont été obtenus ces quinze dernières années **[22, 43, 2, 7, 39, 30, 21]**. Nous renvoyons par exemple à l'article de Colin de Verdière dans ce séminaire pour une description d'une partie de ces résultats **[18]**.

Le résultat d'ergodicité quantique est assez robuste et s'étend à toutes les situations où l'on a un flot hamiltonien ergodique pour la mesure de Liouville **[32]**. En particulier, Gérard-Leichtnam et Zelditch-Zworski ont démontré qu'il reste valable pour des variétés à bord pour lesquelles la mesure de Liouville est ergodique **[28, 69]**. Notons toutefois qu'à l'exception du résultat **[30]**, nous en savons beaucoup moins sur la structure des mesures semi-classiques dans le cas à bord.

1.3. Le cas du tore

L'article d'Anantharaman, Léautaud et Macià s'intéresse à la situation des systèmes intégrables et plus précisément au cas de l'équation de Schrödinger sur le disque. Avant d'y venir, commençons par décrire ce qui est connu dans le cas (sans bord) du tore $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/2\pi\mathbb{Z}^d$ muni de sa métrique canonique sous l'hypothèse $V \equiv 0$: c'est l'exemple le plus simple d'un système *complètement intégrable* (non dégénéré). Dans ce cadre particulier, nous pouvons faire appel à des techniques d'analyse harmonique et de théorie des nombres pour décrire la structure de $\mathscr{N}(\infty)$. Rappelons en effet que, pour $V \equiv 0$, toute solution ψ_λ de (1) est de la forme

$$\psi_\lambda = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d:\|k\|^2=2\lambda} \widehat{c}_k e^{ik.x}, \qquad \sum_{k\in\mathbb{Z}^d:\|k\|^2=2\lambda} |\widehat{c}_k|^2 = 1.$$

Ainsi, la structure des vecteurs propres du laplacien est intimement liée dans ce cadre à la description des solutions de l'équation diophantienne

$$k_1^2 + k_2^2 + \cdots + k_d^2 = 2\lambda$$

dans $\mathbb{Z}^d$. Or le nombre de solutions de cette équation tend vers $+\infty$ le long de certaines sous-suites $\lambda_n \to +\infty$ [**29**]. En d'autres termes, le spectre du laplacien a de fortes multiplicités et ceci rend délicat la description des vecteurs propres lorsque λ tend vers l'infini. En se basant sur cette structure arithmétique, Zygmund [**71**] a démontré que, pour $d = 2$, $V \equiv 0$ et pour toute solution de (1), $\|\psi_\lambda\|_{L^4(\mathbb{T}^2)} \leq 5^{\frac{1}{4}}$. Ceci implique en particulier que tout élement de $\mathscr{N}(\infty)$ est dans ce cas absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue sur le tore et que la densité des mesures est en fait un élément de L^2. Ceci exclut la possiblité qu'une suite de fonctions propres se concentre sur une orbite périodique du flot géodésique. Toujours en dimension 2, Jaffard a quant à lui démontré que cette densité était strictement positive presque partout [**35**] en utilisant la théorie des séries de Fourier lacunaires de Kahane [**38**]. Ce résultat a été ensuite généralisé par Jakobson [**36**] qui a démontré, en se ramenant à la résolution de certaines équations de Pell, que tout élément de $\mathscr{N}(\infty)$ est en fait un polynôme trigonométrique dont les modes de Fourier sont contenus dans deux cercles centrés en l'origine. Pour $d \geq 3$ et en se servant aussi de la structure arithmétique sous-jacente, Bourgain a démontré que les éléments de $\mathscr{N}(\infty)$ restaient des mesures absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue [**36**] et leur régularité a été décrite par Jakobson dans ce même article. Dans le cas où V ne s'annule pas, les méthodes d'analyse harmonique continuent de s'appliquer et nous pouvons par exemple mentionner l'article de Bourgain, Burq et Zworski en dimension 2 [**10**] – voir aussi [**15**]. Finalement, mentionnons que Marklof et Rudnick ont démontré la version faible (2) du théorème d'ergodicité quantique dans le cas du tore [**51**] même si (3) n'est pas vraie pour une base orthonormée quelconque. Dans ce contexte géométrique, il est toutefois nécessaire d'extraire une sous-suite pour assurer la convergence vers la mesure volume [**42**].

L'avantage de ces techniques d'analyse harmonique est de donner des résultats très précis sur la régularité des solutions [**36**] et de pouvoir être poussées jusqu'à traiter des potentiels peu réguliers en dimension 2 [**10, 15**]. Toutefois, elles se généralisent *a priori*