

**THÉORIE DE HODGE
ET GÉOMÉTRIE ALGÈBRE COMPLEXE**

Claire Voisin

Comité de rédaction

Jean-Benoît BOST
François LOESER

Joseph OESTERLÉ

Daniel BARLET (dir.)

Diffusion

Maison de la SMF
B.P. 67
13274 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

EDP Sciences
17, avenue du Hoggar
91944 les Ulis cedex A
France
www.edpsciences.com

Tarifs 2002

Vente au numéro : 69 € (\$78)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Cours Spécialisés
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2002

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN 1284-6090

ISBN 2-85629-129-5

Directeur de la publication : Michel WALDSCHMIDT

COURS SPÉCIALISÉS 10

**THÉORIE DE HODGE
ET GÉOMÉTRIE ALGÈBRIQUE COMPLEXE**

Claire Voisin

Société Mathématique de France 2002
Publié avec le concours de l'Institut Universitaire de France

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
Partie I. Préliminaires	
1. Fonctions holomorphes de plusieurs variables	29
1.1. Fonctions holomorphes d'une variable	30
1.2. Fonctions holomorphes de plusieurs variables	35
1.3. L'équation $\partial g / \partial \bar{z} = f$	41
Exercices	43
2. Variétés complexes	45
2.1. Variétés et fibrés vectoriels	46
2.2. Intégrabilité des structures presque complexes	50
2.3. Opérateurs ∂ et $\bar{\partial}$	58
2.4. Exemples de variétés complexes	64
Exercices	65
3. Métriques kählériennes	67
3.1. Définition et premières propriétés	68
3.2. Caractérisations des métriques kählériennes	72
3.3. Exemples de variétés kählériennes	77
Exercices	83
4. Faisceaux et cohomologie	85
4.1. Faisceaux	86
4.2. Foncteurs et foncteurs dérivés	95
4.3. Cohomologie des faisceaux	102
Exercices	111

Partie II. La décomposition de Hodge

5. Formes harmoniques et cohomologie	115
5.1. Laplaciens	116
5.2. Opérateurs différentiels elliptiques	122
5.3. Applications	125
Exercices	131
6. Cas des variétés kählériennes	133
6.1. La décomposition de Hodge	134
6.2. Décomposition de Lefschetz	139
6.3. Théorème de l'indice de Hodge	144
Exercices	147
7. Structures de Hodge et polarisations	149
7.1. Définitions, premières propriétés	150
7.2. Exemples	158
7.3. Functorialité	165
Exercices	172
8. Complexes de de Rham holomorphes et suites spectrales	175
8.1. Hypercohomologie	176
8.2. Complexes de de Rham holomorphes	185
8.3. Filtrations et suites spectrales	188
8.4. Théorie de Hodge des variétés ouvertes	195
Exercices	201

Partie III. Variations de structure de Hodge

9. Familles et déformations	207
9.1. Familles de variétés	208
9.2. Connexion de Gauss-Manin	215
9.3. Le cas kählérien	219
10. Variation de structure de Hodge	225
10.1. Domaine et application des périodes	226
10.2. Variations de structure de Hodge	234
10.3. Applications	238
Exercices	243

Partie IV. Cycles et classes de cycles

11. Classes de Hodge	247
11.1. Classe de cycle	248
11.2. Classes de Chern	258
11.3. Classes de Hodge	261
Exercices	268

12. Cohomologie de Deligne-Beilinson et application d'Abel-Jacobi	271
12.1. Application d'Abel-Jacobi	272
12.2. Propriétés	280
12.3. Cohomologie de Deligne	284
Exercices	291

Partie V. Topologie des variétés algébriques

13. Le théorème de Lefschetz sur les sections hyperplanes	295
13.1. Théorie de Morse	296
13.2. Application aux variétés affines	302
13.3. Théorème d'annulation et théorème de Lefschetz	309
Exercices	311
14. Étude des pincesaux de Lefschetz	313
14.1. Pinceaux de Lefschetz	314
14.2. Dégénérescence de Lefschetz	318
14.3. Application aux pincesaux de Lefschetz	323
Exercices	331
15. Monodromie	335
15.1. Action de monodromie	336
15.2. Cas des pincesaux de Lefschetz	344
15.3. Application : le théorème de Noether-Lefschetz	355
Exercices	359
16. Suite spectrale de Leray	363
16.1. Définition de la suite spectrale	364
16.2. Le théorème de Deligne	376
16.3. Théorème des cycles invariants	380
Exercices	386

Partie VI. Variation de structure de Hodge

17. Transversalité et applications	391
17.1. Complexes associés aux VISH	392
17.2. Suite spectrale de Leray holomorphe	399
17.3. Étude locale des lieux de Hodge	403
Exercices	412
18. Filtration de Hodge des hypersurfaces	415
18.1. Filtration par l'ordre du pôle	416
18.2. VISH des hypersurfaces	424
18.3. Premières applications	433
Exercices	438

19. Fonctions normales et invariants infinitésimaux	443
19.1. Fibration jacobienne	444
19.2. Application d'Abel-Jacobi	447
19.3. Cas des hypersurfaces de haut degré de \mathbb{P}^n	458
Exercices	463
20. Travaux de Nori	467
20.1. Le théorème de connexité	469
20.2. Équivalence algébrique	478
20.3. Application du théorème de connexité	485
Exercices	489
Partie VII. Cycles algébriques	
21. Groupes de Chow	493
21.1. Construction	495
21.2. Intersection et classes de cycles	503
21.3. Exemples	513
Exercices	519
22. Le théorème de Mumford et ses généralisations	521
22.1. Variétés à CH_0 représentable	523
22.2. La construction de Bloch-Srinivas	532
22.3. Généralisation	541
Exercices	543
23. La conjecture de Bloch et ses généralisations	545
23.1. Surfaces avec $p_g = 0$	546
23.2. Filtration sur les groupes de Chow	558
23.3. Cas des variétés abéliennes	562
Exercices	573
Bibliographie	577
Index	589

INTRODUCTION

Variétés kählériennes et variétés projectives. — Ce livre est constitué de sept parties. Le but des quatre premières parties est d'expliquer l'existence de structures particulières sur la cohomologie des variétés kählériennes (la décomposition de Hodge et la décomposition de Lefschetz) et d'en montrer les premières propriétés et conséquences. Elles constituent une introduction à la géométrie kählérienne et à la théorie de Hodge. Les trois dernières parties ont pour but de présenter des résultats plus avancés en théorie de Hodge. Elles sont consacrées aux liens entre la théorie de Hodge, la topologie et l'étude des cycles algébriques sur les variétés projectives complexes lisses.

Les variétés projectives complexes lisses sont en effet des exemples particuliers de variétés kählériennes compactes. Une variété kählérienne est une variété complexe munie d'une métrique hermitienne dont la partie imaginaire, qui est une 2-forme de type $(1, 1)$ relativement à la structure complexe, est fermée. Cette 2-forme est appelée la forme de Kähler de la métrique kählérienne. Comme l'espace projectif complexe est une variété kählérienne (on dispose par exemple de la métrique de Fubini-Study), les sous-variétés complexes de l'espace projectif sont aussi kählériennes grâce à la métrique induite. On peut même dire précisément quelle est la place occupée par les variétés projectives complexes parmi les variétés kählériennes grâce au théorème de Kodaira :

***Théorème 1.** — Une variété complexe compacte admet un plongement holomorphe dans un espace projectif complexe si et seulement si elle admet une métrique kählérienne dont la forme de Kähler est de classe entière.*

Dans les quatre premières parties de ce texte, nous nous intéresserons essentiellement à la classe des variétés kählériennes, sans privilégier les variétés projectives. La raison est que notre but ici est d'établir l'existence de la décomposition de Hodge et de la décomposition de Lefschetz sur la cohomologie d'une telle variété, et qu'il n'est

pas besoin pour cela de supposer que la classe de Kähler est entière. Néanmoins la décomposition de Lefschetz ne sera définie sur la cohomologie rationnelle que dans le cas projectif, et c'est déjà une raison importante pour se limiter ultérieurement au cas des variétés projectives. En effet, nous dégagerons dans ce texte la notion de structure de Hodge polarisée, et de domaine des périodes polarisées paramétrant les structures de Hodge polarisées. Ces domaines de périodes polarisées possèdent des propriétés de courbure que n'ont pas les domaines de périodes non polarisées. Or la décomposition de Lefschetz, lorsqu'elle est définie sur la cohomologie rationnelle ou entière permet justement de scinder la cohomologie d'une variété kählérienne en une somme directe de structures de Hodge polarisées.

Une autre raison de se limiter dans les applications de la théorie de Hodge aux variétés projectives réside dans le fait qu'une variété kählérienne ne possède pas en général de sous-variétés complexes, alors que les variétés projectives en contiennent beaucoup, à tel point qu'il est conjecturé actuellement, comme une vaste généralisation de la conjecture de Hodge, que les structures de Hodge sur une variété projective X sont gouvernées par, et déterminent en un sens à préciser, la géométrie des sous-variétés algébriques de X , et plus précisément les groupes de Chow de X .

La décomposition de Hodge. — Si X est une variété complexe, l'espace tangent de X en chaque point x est en particulier muni d'une structure complexe J_x . La donnée de cette structure complexe en chaque point est ce qu'on appelle la structure presque complexe sous-jacente. La donnée de J_x fournit une décomposition

$$(0.1) \quad T_{X,x} \otimes \mathbb{C} = T_{X,x}^{1,0} \oplus T_{X,x}^{0,1},$$

où $T_{X,x}^{0,1}$ est l'espace vectoriel des vecteurs tangents complexifiés $u \in T_{X,x}$ tels que $J_x u = -iu$. Du point de vue de la structure complexe, c'est-à-dire de la donnée locale de coordonnées holomorphes, les champs de vecteurs de type $(0,1)$ sont ceux qui annulent les fonctions holomorphes.

La décomposition (0.1) induit une décomposition semblable sur les fibrés de formes différentielles complexes

$$(0.2) \quad \Omega_{X,\mathbb{C}}^k := \Omega_{X,\mathbb{R}}^k \otimes \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=k} \Omega_X^{p,q},$$

où

$$\Omega_X^{p,q} \cong \bigwedge^p \Omega_X^{1,0} \otimes \bigwedge^q \Omega_X^{0,1}$$

et

$$\Omega_{X,\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C} = \Omega_X^{1,0} \oplus \Omega_X^{0,1}$$

est la décomposition duale de (0.1). La décomposition (0.2) a la propriété de symétrie de Hodge

$$\overline{\Omega_X^{p,q}} = \Omega_X^{q,p},$$

où la conjugaison complexe agit de façon naturelle sur $\Omega_{X,\mathbb{C}}^k = \Omega_{X,\mathbb{R}}^k \otimes \mathbb{C}$.