COURS SPÉCIALISÉS 6

TORES ET VARIÉTÉS ABÉLIENNES COMPLEXES

Olivier Debarre

Société Mathématique de France & EDP-Sciences 1999

TORES ET VARIÉTÉS ABÉLIENNES COMPLEXES

Olivier Debarre

Résumé. **—** Un des buts de ce livre est d'initier le lecteur à des aspects modernes de la géométrie analytique et algébrique complexe à travers la théorie classique des tores complexes et des variétés abéliennes. Partant des courbes elliptiques complexes, on passe ensuite au cas de la dimension supérieure, en caractérisant de plusieurs points de vue les tores complexes qui sont des variétés abéliennes, c'est-à-dire qui se plongent de façon holomorphe dans un espace projectif. On démontre des théorèmes classiques sur les variétés abéliennes et on passe en revue la construction de leurs espaces de modules. Le dernier chapitre contient des résultats nouveaux sur la géométrie et la topologie de certaines sous-variétés d'un tore complexe.

Abstract **(Complex Tori and Abelian Varieties). —** This book takes the classical theory of complex tori and complex abelian varieties as an excuse to go through more modern aspects of complex algebraic and analytic geometry. Starting with complex elliptic curves, it moves on to the higher-dimensional case, giving characterizations from different points of view of those complex tori which are abelian varieties, i.e. which can be holomorphically embedded in a projective space. Standard theorems about abelian varieties are proved, and moduli spaces are discussed. The last chapter includes new results on the geometry and topology of some subvarieties of a complex torus.

OLIVIER DEBARRE, Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur et CNRS, 7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cédex, France • *E-mail :* `debarre@math.u-strasbg.fr` • *Url :* `http://www-irma.u-strasbg.fr/~debarre`

Classification mathématique par sujets **(2000). —** 14-01, 14K20, 14K25, 14H52, 18F20, 32C10, 32C17, 32C18, 32G13 55N10, 55N30, 55Q52, 58A10, 58A12.

Mots clefs. **—** Tore complexe, variété abélienne, fonction thêta, espace de modules, théorème de Riemann-Roch, thêtaconstante (ou thetanull).

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Ce livre est une version étoffée d'un cours de D.E.A. donné à l'Université Louis Pasteur au printemps 1997, dont le but était d'offrir une introduction à la théorie classique des tores complexes qui soit la plus élémentaire possible, un peu dans l'esprit du livre [**SD**], tout en présentant en parallèle un point de vue plus « moderne », ce qui permet d'une part d'éclairer les calculs des mathématiciens du XIX^e siècle, d'autre part de familiariser le lecteur avec des théories plus récentes (faisceaux, classes de Chern, cohomologie, etc.). Les tores complexes sont idéaux de ce point de vue : on peut faire tous les calculs « à la main », sans que la théorie soit totalement triviale. Les connaissances demandées au lecteur sont donc très limitées ; il devrait pouvoir lire les chapitres I à VI en sachant simplement ce que sont une variété et une fonction holomorphe. Les deux derniers chapitres, qui n'ont pas été abordés dans le cours proprement dit, sont d'accès peut-être plus difficile : l'avant-dernier parce qu'il est assez technique, le dernier parce qu'il nécessite quelques connaissances (très élémentaires) de géométrie analytique (ou algébrique) complexe. Je n'ai cependant pas du tout cherché ni à écrire un texte « auto-suffisant », n'hésitant au contraire pas à interpréter (souvent en note de bas de page) certains des résultats dans le cadre de théories plus vastes mais inutiles au bon déroulement logique du livre, ni à fournir partout des démonstrations complètes. Chaque chapitre est suivi d'un nombre variable d'exercices.

Après un court premier chapitre consacré à des résultats élémentaires sur les réseaux, on passe dans le chapitre II à la théorie analytique classique des courbes elliptiques complexes : définition et propriétés de la fonction $\wp$ de Weierstrass, réalisation des courbes elliptiques comme cubiques planes, définition des fonctions thêta, des diviseurs et du groupe de Picard d'une courbe elliptique. On termine par la construction d'un espace de modules pour les courbes elliptiques, en expliquant comment l'ensemble de leurs classes d'isomorphisme peut être paramétré, via l'invariant modulaire j, par la droite complexe. Ce panorama rapide permet d'expliquer dans un cadre simple beaucoup des questions (mais pas toutes !) traitées dans la suite du livre pour les tores complexes de dimension quelconque.

On aborde dans le chapitre III une des questions centrales de ce livre : à quelle condition un tore complexe admet-il un plongement [(1)] holomorphe dans un espace projectif ? On explique d'abord une condition nécessaire, valable d'ailleurs pour toute variété complexe :

[(1)] Nous utilisons la terminologie habituelle : un plongement est une application $X \to \mathbf{P}^n$ qui induit un isomorphisme de variétés complexes entre X et son image.

l'existence d'une forme de Kähler entière sur la variété. C'est le prétexte à une introduction rapide à la cohomologie de de Rham et à sa description pour les espaces projectifs et surtout pour les tores complexes, cas dans lequel une forme de Kähler entière admet une description extrêmement concrète en termes du réseau associé.

On examine dans le chapitre IV la même question, mais d'un point de vue très classique, en se limitant ce coup-ci uniquement aux tores complexes. L'idée est de montrer que tout morphisme d'un tore complexe vers un espace projectif est donné par des fonctions d'un type très particulier, dites fonctions thêta. C'est l'occasion de parler de diviseurs sur une variété complexe, le point essentiel étant de construire, pour tout diviseur effectif sur un tore complexe, une fonction thêta dont il est le diviseur (nous admettons certains des rudiments de la théorie des diviseurs, en partie le fait que l'anneau des germes de fonctions holomorphes sur une variété complexe est factoriel). On retrouve ainsi le fait qu'un tore complexe admettant un plongement holomorphe dans un espace projectif possède une forme de Kähler entière, en obtenant un résultat général plus précis : toute application holomorphe d'un tore complexe X vers un espace projectif se factorise à travers un tore quotient de X appelé « abélianisé de X », qui, lui, admet une forme de Kähler entière. Toutes les fonctions méromorphes et tous les diviseurs de X proviennent de son abélianisé (cor. IV.3.6, p. 44).

On fait le lien dans le chapitre V entre les approches des deux chapitres précédents en définissant les fibrés en droites sur une variété complexe. Un bref survol (sans démonstration) de la théorie des faisceaux et de leur cohomologie nous permet de définir la première classe de Chern d'un fibré en droites de façon cohomologique comme une application du groupe de Picard vers le second groupe de cohomologie entière. On explique aussi comment calculer la première classe de Chern réelle à l'aide d'une métrique hermitienne. La plupart de ces résultats ne sont pas essentiels pour la suite. Ils nous permettent cependant de déterminer tous les fibrés en droites sur un tore complexe (théorème d'Appell-Humbert V.5.10, p. 61). Le lien entre les approches précédentes est alors clair : à toute application holomorphe u d'un tore complexe X vers un espace projectif $\mathbf{P}W$ est associé un fibré en droites L sur X, à savoir l'image inverse du fibré $\mathscr{O}_{\mathbf{P}W}(1)$ par u. Lorsque u réalise un isomorphisme sur son image, la forme de Kähler entière sur X construite dans le chapitre III représente l'image inverse par u de la première classe de Chern réelle de $\mathscr{O}_{\mathbf{P}W}(1)$, tandis que celle construite dans le chapitre IV représente la première classe de Chern de L : elles coïncident.

On étudie dans le chapitre VI la réciproque de la question posée plus haut : un tore complexe admettant une forme de Kähler entière peut-il se plonger dans un espace projectif ? La réponse est bien sûr affirmative pour toutes les variétés complexes compactes (c'est le célèbre théorème de Kodaira), mais on peut démontrer ce résultat « à la main » dans le cas des tores complexes, en construisant explicitement un tel plongement à l'aide des fonctions thêta de Riemann. On démontre tout d'abord les conditions de Riemann, qui caractérisent concrètement, en termes du réseau associé, les tores complexes sur lesquels existe une forme de Kähler entière. Le phénomène nouveau par rapport à la dimension 1 est que « la plupart » des tores complexes ne vérifient pas ces conditions en dimension > 1 (leur abélianisé est nul). On démontre ensuite le théorème de Riemann-Roch dans le cas d'un fibré en droites ample sur un tore complexe (c'est-à-dire que l'on calcule la dimension de l'espace de ses sections). Le théorème de Lefschetz s'en déduit, qui montre qu'un tel fibré en droites (qui existe sur un tore complexe satisfaisant aux conditions de Riemann) permet de construire un plongement holomorphe du tore dans un espace projectif. On a ainsi complètement répondu à la question initiale, en obtenant une condition nécessaire et suffisante sur un réseau pour que le tore complexe associé se réalise comme sous-variété d'un espace projectif. Par le fameux théorème de Chow, une telle sous-variété est alors algébrique, c'est-à-dire qu'elle est définie par des équations polynomiales (homogènes). C'est ce que l'on appelle une variété abélienne complexe.

Ce chapitre se termine par quelques constructions classiques sur les tores complexes : dualité, dimension de l'espace des sections d'un fibré en droites quelconque, polarisation sur une variété abélienne, théorème de réductibilité de Poincaré pour les variétés abéliennes, description (rapide) de l'algèbre des endomorphismes rationnels d'une variété abélienne, involution de Rosati. On montre que le corps des fonctions méromorphes sur un tore complexe est une extension de type fini du corps des nombres complexes, de degré de transcendance égal à la dimension de son abélianisé. Sont aussi inclus quelques résultats moins connus, comme l'unicité de la décomposition d'une variété abélienne polarisée en produit de facteurs indécomposables (cor. VI.9.2, p. 79).

Le but du chapitre VII est de présenter un survol de la théorie des espaces de modules de variétés abéliennes polarisées, en sacrifiant le détail des démonstrations plutôt que la précision des énoncés, l'idée étant d'une part de ne pas noyer le lecteur débutant, d'autre part d'aider les spécialistes à se retrouver dans le maquis parfois épais des notations des ouvrages de référence sur le sujet. Les conditions de Riemann du chapitre précédent permettent de montrer que les variétés abéliennes polarisées de dimension et de type donnés sont paramétrées par le quotient d'un demi-espace de Siegel par un sous-groupe arithmétique du groupe symplectique, qu'un théorème de Cartan permet de munir d'une structure d'espace analytique dont on détermine précisément les points singuliers (th. VII.1.5, p. 90, et prop. VII.3.4, p. 94). En dimension 1, l'invariant j permettait de réaliser un isomorphisme entre cet espace de module et la droite complexe. De façon tout-à-fait analogue, on montre, en suivant Igusa, que les « thêta-constantes » (définies à partir des fonctions thêta de Riemann) sont des formes modulaires pour certains sous-groupes arithmétiques du groupe symplectique et permettent de plonger ces espaces de modules comme variétés algébriques quasi-projectives dans des espaces projectifs. C'est le théorème principal de ce chapitre, aboutissement des travaux de J. Igusa, D. Mumford et G. Kempf, dont on esquisse de façon assez détaillée la preuve. Les démonstrations complètes se trouvent dans l'ouvrage de référence [**LB**].

Le dernier chapitre est de nature franchement plus géométrique et contient des résultats plus récents dont certains apparaissent pour la première fois dans un livre. On y utilise quelques outils géométriques supplémentaires : dimension d'une variété analytique (peut-être singulière), dimension des fibres d'une application holomorphe, variétés normales, théorème de pureté, factorisation de Stein, mais rien n'empêche le lecteur de les admettre (des références précises sont fournies). Le résultat principal de ce chapitre est un théorème de connexité (th. VIII.3.1, p. 107) du type Fulton-Hansen, dont on tire deux conséquences principales. La première est que, sous quelques hypothèses simples, le groupe fondamental d'une sous-variété d'un tore complexe X de dimension strictement plus grande que la moitié de celle de X est isomorphe à celui de X (cor. VIII.3.4, p. 111). La seconde est que l'application de Gauss d'une sous-variété lisse d'un tore complexe invariante par translation par aucun sous-tore non nul, est à fibres finies (cor. VIII.4.4, p. 116), de sorte que son fibré canonique est ample. Ce dernier résultat n'est pas original, mais il est obtenu comme conséquence d'un nouveau théorème (th. VIII.4.2, p. 115) montrant que pour des sous-variétés A et B d'un tore complexe avec $B \subset A$, la dimension de $A - B$ est égale à celle de la réunion des espaces tangents à A en les points de B.