Les lecteurs studieux lisent dans les bibliothèques. Les professeurs font leurs cours. Les comptables alignent des colonnes de chiffres. Les apprentis pâtissiers fourrent de crème au beurre des rangées de petits choux. Les pianistes font leurs gammes. Assis à leurs tables, méditatifs et concentrés, les écrivains alignent des mots.

Georges Perec [**64**]

Je dédie ce livre à la mémoire de Nicole Desolneux-Moulis.

LES SYSTÈMES HAMILTONIENS ET LEUR INTÉGRABILITÉ

Michèle Audin

Résumé. — Ce livre présente certaines techniques modernes de la théorie des systèmes intégrables, vues comme des variations sur le thème des variables action-angle. On y trouvera des méthodes analytiques issues de la théorie de Galois des équations différentielles et, plus classiquement, les méthodes algébro-géométriques liées aux équations de Lax, ainsi que de nombreux exemples.

***Abstract* (Hamiltonian systems and integrability).** — This book presents some modern techniques in the theory of integrable systems, as variations on the theme of action-angle coordinates. These are analytical methods coming form the Galois theory of differential equations and—more classically—algebro-geometric methods related to Lax equations. Many examples are also given.

***Resumo* (Sistemas hamiltonianos e integrabilidade).** — Neste livro, introduzo técnicas modernas da teoria dos sistemas integráveis, apresentadas como variações sobre o tema das coordonenades acção-ângulo. Encontram-se métodos analíticos da teoria de Galois das equações diferenciais e — mais classicamente — métodos da geometria algébrica em relação com as equações de Lax. Apresento também muitos exemplos.

Michèle Audin, Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur et CNRS, 7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg cedex, France • *E-mail :* `Michele.Audin@math.u-strasbg.fr` • *Url :* `http://www-irma.u-strasbg.fr/~maudin`

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 70H05, 53C15, 12Hxx, 34A30, 14H10, 14Pxx.

Mots clefs. — Systèmes hamiltoniens, systèmes intégrables, géométrie symplectique, variables action-angle, théorème d'Arnold-Liouville, théorie de Galois différentielle, extensions de Picard-Vessiot, équations de Lax, toupies, pendule sphérique, géodésiques de l'ellipsoïde, système de Hénon-Heiles.

TABLE DES MATIÈRES

Appendices

INTRODUCTION

Ce texte est une introduction à quelques aspects topologiques, analytiques et algébro-géométriques de la théorie des systèmes hamiltoniens complètement intégrables.

Les systèmes hamiltoniens sont les équations différentielles qui décrivent les mouvements d'un objet dont dont l'énergie est conservée (mécanique conservative). Certains de ces systèmes se laissent intégrer « par quadratures », ce sont les systèmes hamiltoniens complètement intégrables. Un exemple que tous les enfants connaissent est celui du mouvement d'une toupie. Les mouvements d'une particule libre sur une surface de révolution ou un ellipsoïde sont d'autres exemples simples de systèmes complètement intégrables.

Ce qu'on trouvera dans ce texte. — La théorie des systèmes intégrables trouve des méthodes, des adeptes et des champs d'applications dans la plupart des domaines des mathématiques. Elle a donc fait l'objet d'immenses quantités de travaux. Aucun livre — fût-il dix fois plus volumineux que cet opuscule — ne peut rendre compte de tous ces aspects.

Les systèmes intégrables appartiennent à la mécanique hamiltonienne (conservative), c'est-à-dire, aujourd'hui, à la géométrie symplectique, et ils ont beaucoup de quantités conservées, d'« intégrales premières ». C'est à cette définition qu'est consacré le premier chapitre.

Le point central de l'étude présentée ici est le théorème d'Arnold-Liouville, qui décrit les propriétés des solutions pour lesquelles les valeurs de ces quantités conservées sont assez générales. Il y a des coordonnées dans lesquelles ces systèmes ont des formes très simples. On a dit que ces systèmes sont « intégrables par quadratures ». Géométriquement : les trajectoires sont dessinées sur des tores et elles sont *linéaires* sur ces tores (figure 1). C'est le théorème d'Arnold-Liouville, à la démonstration et à quelques illustrations duquel est consacré le chapitre II.

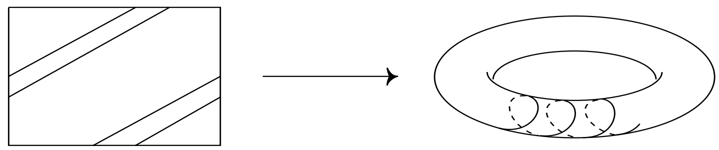

FIGURE 1

L'étude bifurque ensuite dans deux directions indépendantes entre elles :

– vers la théorie algébrique des équations différentielles. Le théorème d'Arnold-Liouville affirme que les solutions proches d'une solution assez générale sont de même nature que leur voisine (figure 1 encore). Il est alors tentant de regarder ce qui se passe, en général, pour les solutions (infinitésimalement) voisines d'une trajectoire d'un champ hamiltonien. Le mot que je viens de mettre entre parenthèses indique qu'on a linéarisé l'équation différentielle. Avec des hypothèses convenables d'analyticité, on peut utiliser la théorie de Picard-Vessiot (théorie de Galois différentielle). Le résultat le plus intéressant est un théorème de Morales et Ramis [**58**] qui affirme que le groupe de Galois différentiel de l'équation linéarisée ne peut pas être trop compliqué (sa composante neutre reste un groupe abélien) quand le système est intégrable. Ce théorème peut servir, effectivement, à montrer que tel ou tel système hamiltonien n'est *pas* complètement intégrable.
– vers la géométrie algébrique, qui est capable, dans certaines situations, de préciser, voire de rendre effectif, le théorème d'Arnold-Liouville. Si le système différentiel peut s'écrire comme une « équation de Lax » , il lui est associé une (famille de) courbe(s) algébrique(s) qui entraîne à sa suite la (famille des) jacobienne(s), des tores prêts à jouer le rôle de tores de Liouville. Je montrerai notamment comment cette machinerie peut fournir la réponse à des questions naïves et concrètes, par exemple, comment savoir si une valeur des intégrales premières est « générale ».

Deux appendices résument les définitions et propriétés utiles de la théorie de Galois différentielle d'une part, des courbes algébriques de l'autre.

Si les aspects algébro-géométriques ont fait l'objet d'un très grand nombre de travaux, voire de livres, il n'en et pas de même des aspects « galoisiens ». Une de mes ambitions en rédigeant ce livre a été de comprendre, puis de populariser, le beau théorème de Morales et Ramis en le donnant à lire à un public moins spécialisé que celui pour lequel ont été écrits les textes originaux. Le critère de non-intégrabilité dont il est question appartient au monde de la théorie de Galois différentielle, il n'en concerne pas moins les objets de la géométrie !

C'est pourquoi je me suis efforcée

- d'utiliser les exemples les plus classiques et surtout les plus élémentaires possibles. L'exemple principal utilisé ici comme illustration des techniques galoisiennes (un cas du système de Hénon-Heiles menant à l'équation d'Airy), qui est sans doute l'exemple le plus simple possible, n'apparaît pas dans les articles originaux ;
- de clarifier un peu la situation en séparant
  - ce qui relève de la théorie générale des équations différentielles (équation aux variations, formes initiales, intégrales premières, groupes de Galois) et
  - ce qui relève effectivement de la géométrie symplectique.

  De même, j'ai essayé de dépouiller un peu les arguments des démonstrations pour aller droit au but poursuivi ;
- de rester à un niveau acceptable : ces notes sont celles d'un cours de DEA, professé devant d'authentiques étudiants, auxquels la simplicité de la présente rédaction doit d'ailleurs beaucoup.

Je crois beaucoup à la vertu des exemples. Il y en a donc de nombreux (bien classiques, je l'ai dit, mais ce sont les meilleurs) dans les chapitres I et II. Si les mathématiques utilisées dans le chapitre III ne sont pas plus difficiles que dans les deux premiers, les *applications* du théorème de Morales & Ramis sont plus élaborées. Ce chapitre contient donc, hélas, surtout des exemples académiques. Le chapitre IV, quant à lui, est presque exclusivement constitué d'exemples — le principal étant celui des géodésiques des quadriques.

Les exercices. — Chaque chapitre se termine par une série d'exercices. La plupart sont des applications directes du cours. Contrairement à la tradition, aucune démonstration sérieuse n'a été laissée en exercice.

L'index. — J'ai fait un effort particulier pour que l'index soit le plus complet et le plus redondant possible, des conditions indispensables à son utilisabilité.

Les notations. — Elles sont aussi standard que possible. Je ne voyais pas l'intérêt de désigner par $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ le stabilisateur de l'élément x pour l'opération du groupe G, par G_x une forme symplectique ou par ω l'espace projectif complexe, je me suis donc conformée à la tradition. J'utilise les caractères *penchés* pour désigner les notions que je suis en train de définir. Les *italiques* ont, eux, une fonction emphatique.

Ce qu'on n'y trouvera pas. — Beaucoup de choses, on l'a dit, parmi lesquelles

- l'utilisation de la machinerie algébro-géométrique pour le décompte des tores de Liouville, sujet sur lequel je n'aurais pu que répéter [**9**],
- des exemples de systèmes intégrables en dimension infinie, pas d'équation de Korteweg-de Vries, pas de diffusion inverse, sujets auxquels on pourra s'initier en lisant le petit livre de Moser [**62**] et l'article de Segal dans [**39**],
- les questions de perturbation, voir aussi [**62**].

Note bibliographique. — J'utilise les bases du calcul différentiel sur les variétés (champs de vecteurs, formes différentielles, dérivée de Lie) pour lesquelles je renvoie les lectrices, par exemple, à [**51**] ou au tome I de [**71**]. J'utilise aussi la définition d'un groupe et d'une algèbre de Lie (et pas beaucoup plus)(1) et les notions de base sur les groupes opérant sur les variétés (qu'on trouvera par exemple dans [**18**] et aussi dans [**6**]). À partir de là, ce texte est « autonome » au sens où il contient toutes les définitions des objets utilisés et toutes les démonstrations, à l'exception

– de celles de l'unicité des extensions de Picard-Vessiot et de l'algébricité du groupe de Galois, qu'on trouvera dans [**54**],
– de celle de la trivialité des fibrés vectoriels holomorphes sur les surfaces de Riemann ouvertes, que j'utilise de façon très marginale et qu'on trouvera dans [**26**],
– de quelques résultats sur les surfaces de Riemann (complétion, Riemann-Roch...) utilisés au chapitre IV et énumérés dans l'appendice B, qu'on trouvera dans [**68**].

Pendant l'année 1999, j'ai donné trois cours sur les systèmes intégrables, dans lesquels j'ai eu l'occasion d'expliquer les quelques aspects présentés dans ce livre :

– à Lisbonne en juin, où j'avais surtout en vue les aspects algébro-géométriques (ici le chapitre IV),
– au CIRM en juillet (la partie « galoisienne », ici le chapitre III, n'y ayant été évoquée qu'assez rapidement et la partie algébro-géométrique pas du tout) pour l'école « Symétries et application moment », organisée par Patrick Iglesias et Elisa Prato,
– à Strasbourg à l'automne (cours de DEA), où j'ai présenté tout le contenu du livre, à l'exception du chapitre IV, et en particulier, assez en détail, la partie galoisienne.

Ce livre émane des notes que j'ai écrites pour les « étudiants » de tous ces cours.

Remerciements. — Je remercie tous les participants, étudiants, auditeurs de ces divers cours et plus particulièrement l'assistance chaleureuse du cours de Lisbonne. La ténacité et la fidélité des auditeurs qui m'ont subie deux fois par jour pendant deux longues semaines m'ont beaucoup touchée et impressionnée.

Un remerciement spécial à Ana Cannas da Silva qui, non contente d'avoir organisé le cours à Lisbonne(2), a suivi très activement le cours à Marseille en y apportant par ses remarques et questions, de nombreuses corrections et améliorations.

La partie galoisienne a été essentiellement mise au point pendant le groupe de travail sur le théorème de Morales & Ramis que Claudine Mitschi et moi-même

(1) Les lecteurs pourront, pour ceci aussi, consulter [**51**].
(2) Um mês de junho muito agradável em Lisboa... É um grande prazer agradecer o convite.