EXPOSÉS DE SÉMINAIRES
(1950 - 1999)

Jean-Pierre Serre

Documents Mathématiques

série dirigée par Pierre COLMEZ

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Documents Mathématiques
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN En cours

ISBN 2-85629-103-1

Directeur de la publication : M. Martin-Deschamps

DOCUMENTS MATHÉMATIQUES 1

EXPOSÉS DE SÉMINAIRES (1950 - 1999)

Jean-Pierre Serre

Société Mathématique de France 2001

TABLE DES MATIÈRES

PRÉFACE

Les textes composant le présent volume reproduisent des exposés que j'avais faits dans les séminaires Bourbaki, Cartan, Chevalley et Delange-Pisot-Poitou entre 1950 et 1999 (en fait, la plupart datent des années 1950–1960). Aucun d'eux ne figure dans les volumes de « Collected Papers » publiés par Springer-Verlag en 1986 et 2000.

Les sujets abordés sont assez divers : Groupes de Lie, Homotopie, Fonctions de variables complexes, Algèbre homologique, Géométrie algébrique, Théorie des nombres, Formes modulaires.

La transcription en TeX[(*)] m'a permis de faire un grand nombre de corrections de détail, portant notamment sur les notations : j'ai remplacé le couple « biunivoque, sur » des années 50 par « injectif, surjectif » ; « décemment ramifié » est devenu « modérément ramifié », et « $x \to f(x)$ » s'est transformé en « $x \mapsto f(x)$ ». Je n'ai pas hésité non plus à corriger les erreurs de calcul, ou de raisonnement, et à compléter certaines démonstrations.

Des notes, placées à la fin, apportent des renseignements complémentaires ; elles sont indiquées dans le texte par un chiffre de renvoi placé dans la marge.

Paris, décembre 2000

J-P. Serre

[(*)] La frappe du texte a été effectuée par P. Colmez et ses collaborateurs ; je les remercie très vivement.

Séminaire Bourbaki mars 1950
1949-50, exposé n° 27

EXTENSIONS DE GROUPES LOCALEMENT COMPACTS

d'après Iwasawa et Gleason

Cet exposé n'étudie que les extensions finies de groupes de Lie, ou plus généralement, de groupes localement compacts. Les extensions infinies (c'est-à-dire les limites projectives) feront l'objet d'un exposé ultérieur. 1

1. Extensions de groupes discrets (cf. Baer et Eilenberg-Maclane)

Un groupe E est dit extension du groupe F par le groupe B s'il admet F 2
pour sous-groupe invariant et si E/F = B. Dans toute la suite, B et F seront considérés comme connus, et l'on cherchera à construire le groupe E.

a) F étant invariant, les automorphismes intérieurs de E définissent des automorphismes de F, d'où une représentation $\mathrm{E} \to \mathrm{Aut(F)}$. Dans cette représenta- 3
tion, F est envoyé sur Int(F), d' où, par passage au quotient, une représentation $\theta : \mathrm{B} \to \mathrm{Aut(F)}/\mathrm{Int(F)}$, qui est un premier *invariant* de l'extension E.

b) Cette représentation étant connue, considérons la représentation

$$\mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{Aut(F)} \times \mathrm{B},$$

produit des représentations canoniques de E dans Aut(F) et dans B. Le noyau de cette représentation est le centre C de F, et l'image est le sous-groupe H formé des couples (σ, b) où $\sigma = \theta(b)$. H et C sont donc connus et l'on voit que *l'on s'est ainsi ramené à étudier les extensions de noyau abélien.*

c) Dans ce dernier cas, soit f une section (c'est-à-dire une application $\mathrm{B} \to \mathrm{E}$ telle que $p \circ f(b) = b$ pour tout $b \in \mathrm{B}$, p désignant la projection de E sur B) et posons $f(x) \cdot f(y) = u(x,y) f(xy)$. La fonction u est à valeurs dans F ; c'est une 2-*cochaîne* sur B. Si l'on calcule $f(x) \cdot f(y) \cdot f(z)$, on trouve que u vérifie l'identité $\theta_x u(y,z) + u(x,yz) = u(x,y) + u(xy,z)$. Si l'on convient d'appeler cobord de la n-cochaîne $g(x_1,\dots,x_n)$ la $n+1$-cochaîne :

$$dg(x_1,\dots,x_{n+1}) = \theta_{x_1} g(x_2,\dots,x_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i g(x_1,\dots,x_i\cdot x_{i+1},\dots,x_{n+1}) + (-1)^{n+1} g(x_1,\dots,x_n),$$

on voit que u est un 2-*cocycle.* En outre, si l'on remplace f par une section $f'(x) = v(x)f(x)$ où $v(x)\in \mathrm{F}$, f' définit un cocycle $u' = u + dv$. D'où :

Les extensions de F *par* B (correspondant à une représentation $\mathrm{B}\to \mathrm{Aut(F)}$ donnée) *correspondent bijectivement aux éléments du groupe de cohomologie de dimension* 2 *du groupe* B *à coefficients dans* F.

2. Extensions de groupes topologiques

Définitions évidentes. Les résultats précédents se transposent de la façon suivante :

a) Remplacer automorphisme par automorphisme de groupe topologique. Si F est localement compact, on munit Aut(F) de la topologie de la convergence compacte et la représentation θ est continue.

b) Le seul changement est que l'on peut simplement dire que E admet une *représentation continue* de noyau C sur H.

c) On ne peut appliquer la méthode de la cohomologie que *si l'on a une section continue*, ce qui est une exigence extrêmement forte.

Remarque. — Toutes les méthodes précédentes s'appliquent de façon locale,
4 et, en particulier, valent aussi bien pour un noyau de groupe. La méthode c) n'exige alors que l'existence de *sections locales continues.*

3. Espaces fibrés principaux

L'existence, sous certaines conditions, de sections locales continues est un cas particulier d'un résultat valable pour les espaces fibrés principaux.

Définition. — Soient E un espace topologique et F un groupe topologique opérant sur E. On dit que E est un *fibré principal de groupe* F si, pour tout
5 couple (x,x') d'éléments de E, il existe au plus un $s\in \mathrm{F}$ avec $x' = x\cdot s$ et si cet s est fonction continue de (x,x').

Les *fibres* sont les classes de la relation d'équivalence $x' \equiv x\cdot s$. La *base* est le quotient de E par cette relation. Si E est un groupe topologique et F un sous-groupe fermé, les fibres sont les classes à droite et la base est l'espace homogène associé. Si la base et le groupe structural sont localement compacts, E l'est aussi.

THÉORÈME 1 (GLEASON). — *Si le groupe structural* F *est un groupe de Lie et si* E *est un espace complètement régulier* (en particulier un groupe topologique séparé)*,* E *est localement trivial* (localement trivial signifie que par tout point passe une section locale continue).

D'après un théorème d'ADO, il existe une représentation linéaire locale fidèle de F. Soit M l'algèbre de matrices où F est ainsi plongé. Le groupe F opère sur M et, en particulier, sur le groupe G des matrices inversibles. Soit $g : \mathrm{O} \longrightarrow \mathrm{G}$ une application continue d'un voisinage O d'un point donné de E, vérifiant la condition $g(xs) = g(x) \cdot s$ pour $s \in \mathrm{F}$ assez petit. L'image réciproque par g
d'une section locale du F-fibré G donne une section locale de E. Tout revient 6
donc à construire une telle application g.

Pour cela, on prend une fonction réelle positive, continue, égale à 1 en un point déterminé de la fibre étudiée et nulle en dehors d'un voisinage convenable, soit f. Posons $g(x) = \int 1_{\mathrm{M}} f(xs) s^{-1} ds$ (ds : mesure de Haar à gauche sur F ; 1_{M} : unité de M). On a bien $g(xt) = g(x)t$ (pour t assez petit) et $g(x) \in \mathrm{G}$ pour x assez près du point donné, c.q.f.d.

Remarque. — Le caractère local de la démonstration montre que l'on a :

THÉORÈME 2. — *Si* E *est un noyau de groupe admettant pour noyau de sous-groupe un noyau de groupe de Lie,* E *admet une section locale continue.*

4. Extensions d'un groupe de Lie par un groupe de Lie

Nous allons démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 3 (IWASAWA-GLEASON). — *Toute extension d'un groupe de Lie par un groupe de Lie est un groupe de Lie.*

La démonstration étant purement locale montrera même que toute extension d'un *noyau* de groupe de Lie par un autre est un noyau de groupe de Lie.

Appliquons les méthodes du n° 1. Aut(F) est un noyau de groupe de Lie ainsi que Aut(F)/Int(F). Toute représentation continue d'un noyau de groupe de Lie dans un autre étant analytique, il en résulte que θ est analytique et que H est un noyau de groupe de Lie. On est donc ramené au cas abélien.

Pour étudier ce dernier, remarquons que, d'après le théorème 2, E admet une section locale continue, et correspond donc à une classe de cohomologie de dimension 2. Si l'on choisit une telle section locale (et de ce fait un cocycle), on peut identifier l'espace E au produit B $\times$ F et le munir de la structure différentiable produit. Mais pour que la loi de groupe soit différentiable, on voit tout de suite qu'il faut et qu'il suffit que le cocycle en question soit différentiable sur B$\times$B. Nous avons donc à montrer que *toute classe de cohomologie contient un cocycle indéfiniment différentiable.*

Soient donc u un 2-cocycle continu et $k(x)$ une fonction indéfiniment différentiable sur B, à support compact, et telle que $\int k(x)\ dx = 1$ (dx mesure de
7 Haar à gauche). Posons $v(x) = \int u(x,t)k(t)\ dt$. Un calcul immédiat montre que :

$$(1) \qquad (u - dv)(x,y) = \int u(x,yt)k(t)\ dt - \int u(x,t)k(t)\ dt.$$

Le cocycle u est donc cohomologue au cocycle du membre de droite. Mais ce dernier est indéfiniment différentiable par rapport à y (produit de composition). Nous allons passer de ce résultat à la différentiabilité par rapport au couple (x,y) en utilisant le fait que, pour tout cocycle u, le cocycle $v(x,y) = -\theta_{xy}u(y^{-1},x^{-1})$ lui est cohomologue [car, si u est relatif à une section f, v est relatif à la section $x \mapsto f(x^{-1})^{-1}$].

On voit alors, en échangeant x et y, que tout cocycle est cohomologue à un cocycle différentiable en x. Appliquant à ce dernier l'identité (1) on trouve bien un cocycle indéfiniment différentiable par rapport à (x,y).

5. Extensions d'un $\mathbf{R}^n$ par un compact

D'après le théorème 1, une telle extension est un fibré localement trivial (puisque le groupe structural est $\mathbf{R}^n$). Mais alors elle est topologiquement triviale (prolonger une section partielle en utilisant le fait que $\mathbf{R}^n$ est un rétracte
8 absolu). On peut donc appliquer les méthodes cohomologiques.

Soit alors u un 2-cocycle, et appliquons-lui l'identité (1) où l'on a pris pour $k(x)$ la fonction constante égale à 1. On trouve $u - dv = 0$, ce qui montre que le second groupe de cohomologie de B est nul. D'où :

THÉORÈME 4 (IWASAWA). — *Dans toute extension d'un $\mathbf{R}^n$ par un groupe compact, il y a une section qui est un sous-groupe.*

En fait, une extension évidente de la méthode précédente montre que

9 THÉORÈME 5. — *Tous les groupes de cohomologie d'un groupe compact dans $\mathbf{R}^n$ sont nuls.*

Si l'on applique ceci au premier groupe de cohomologie, on voit que cela donne : dans les hypothèses du théorème 4, *deux sous-groupes sections sont conjugués* (IWASAWA).

Remarque. — Ces démonstrations étaient employées depuis longtemps dans le cas des groupes *finis* (cf. par exemple ZASSENHAUS, [3] Chap. 4, th. 25).

6. Extensions de groupes compacts

THÉORÈME 6 (IWASAWA). — *Si* F *est un groupe compact, le groupe quotient* Aut(F)/ Int(F) *est totalement discontinu.*

Dans le cas abélien, cela revient à dire que Aut(F) est totalement discontinu, ce qui est évident puisque $\mathrm{Aut(F)} = \mathrm{Aut}(\hat{\mathrm{F}})$ et que $\hat{\mathrm{F}}$ est discret.

Dans le cas général, on remarque que tout automorphisme appartenant à la composante connexe de l'unité dans Aut(F) laisse les caractères de F invariants (cela tient à ce que *les caractères forment un ensemble discret* pour la topologie de la convergence uniforme d'après les relations d'orthogonalité de Schur). Si F_i est l'image de F dans une représentation linéaire, cet automorphisme passe donc au quotient et définit sur F_i un automorphisme intérieur (il s'agit, en somme, de vérifier le théorème 6 pour les groupes de Lie, ce qui n'est pas difficile, vu que l'on connaît leur structure). On en déduit, par un raisonnement de compacité, que l'automorphisme de F étudié est intérieur, ce qui achève la démonstration.

On en déduit aussitôt les résultats suivants :

THÉORÈME 7 (IWASAWA). — *Tout groupe compact à centre nul est facteur direct dans toute extension connexe.*

[Appliquer 1.b), en remarquant que $\theta = 0$ et que $\mathrm{C} = 0$.]

THÉORÈME 8 (IWASAWA). — *Tout groupe compact abélien est contenu dans le centre de toute extension connexe* (car $\theta = 0$).

THÉORÈME 9 (IWASAWA). — *Tout groupe résoluble compact connexe est abélien.*

7. Structure des groupes de Lie résolubles

(Rappelons que résoluble signifie : qui admet une suite de composition à quotients abéliens.)

THÉORÈME 10 (CHEVALLEY). — *Tout groupe de Lie connexe résoluble est homéomorphe au produit d'un tore par un* $\mathbf{R}^n$. 10

Le groupe étudié, G, admet une suite de composition formée de sous-groupes fermés connexes tels que les quotients soient abéliens : il suffit de prendre les commutateurs successifs de G.

On démontre le théorème 10 en raisonnant par récurrence sur la longueur de la chaîne précédente et en utilisant le lemme suivant :

Lemme 1. — Toute extension de $\mathbf{R}^n$ *ou d'un tore* $\mathbf{T}^p$ *par* $\mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{T}$ *admet une section continue qui est un sous-groupe.*

La démonstration du lemme est immédiate : on sépare les divers cas, et l'on fait usage des théorèmes 4 et 9.

Le théorème 10 se laisse préciser comme suit :

Soit $\mathbf{T}^p$ *un tore, sous-groupe compact maximum d'un groupe résoluble* E. *Le groupe* E *possède des sous-groupes à* 1 *paramètre,* $\mathrm{R}_1, \ldots, \mathrm{R}_q$ *isomorphes à* $\mathbf{R}$ *et tels que tout* $x \in \mathrm{E}$ *s'écrive d'une façon et d'une seule sous la forme*

$$x = t \cdot r_1 \cdots r_q, \quad \text{avec } t \in \mathbf{T}^p \text{ et } r_i \in \mathrm{R}_i.$$

Bibliographie

[1] A. GLEASON, *On the structure of locally compact groups*, Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A. **35** (1949), 384–386.

[2] K. IWASAWA, *On some types of topological groups*, Ann. of Math. **50** (1949), 507–558.

[3] H. ZASSENHAUS, *The Theory of Groups*, Chelsea, New York, 1949.

Additif [Avril 1957]

Les résultats d'IWASAWA et GLEASON donnés dans le présent exposé étaient destinés à faciliter l'étude de la structure des groupes localement compacts ; depuis, cette structure a été complètement élucidée, grâce aux travaux de GLEASON, MONTGOMERY-ZIPPIN, YAMABE.

On trouvera un bon exposé de la question dans :

D. MONTGOMERY and L. ZIPPIN, *Topological Transformation Groups*, New York, Interscience, 1955 (Interscience Tract n° 1).

Séminaire Cartan
1950-51, exposé n° 5

18 décembre 1950

APPLICATIONS ALGÉBRIQUES DE LA COHOMOLOGIE DES GROUPES I

1. Préliminaires

Dans cet exposé et le suivant, il sera exclusivement question de *cohomologie* des groupes, et non d'homologie.

Rappelons qu'étant donné un groupe G (non nécessairement abélien) et un groupe abélien A sur lequel G opère à gauche, on a défini les groupes de cohomologie $\mathrm{H}^i(\mathrm{G},\mathrm{A})$; ces groupes peuvent être définis, par exemple, au moyen des *cochaînes* sur G à valeurs dans A, munies du cobord habituel :

$$(\delta f)(x_1,\ldots,x_{i+1}) = x_1 \cdot f(x_2,\ldots,x_{i+1}) + \sum_{j=1}^{i}(-1)^j f(x_1,\ldots,x_j x_{j+1},\ldots,x_{i+1}) + (-1)^{i+1} f(x_1,\ldots,x_i)\,.$$

Si A est muni d'un ensemble d'opérateurs S permutant avec les opérateurs de G, alors on peut faire opérer S sur les groupes $\mathrm{H}^i(\mathrm{G},\mathrm{A})$: cela résulte de l'axiome (II_c) de l'exposé 1, ou bien d'une définition directe à partir des cochaînes. En particulier, si A est un espace vectoriel sur un corps k, et si les opérations de G sont k-linéaires, $\mathrm{H}^i(\mathrm{G},\mathrm{A})$ est un espace vectoriel sur k.

Enfin, signalons le résultat suivant :

Soit G un groupe fini à n éléments, et soit $h \in \mathrm{H}^i(\mathrm{G},\mathrm{A}), i > 0$; on a $nh = 0$.

Soit f un cocycle de la classe h, et écrivons que $(\delta f)(x_1,\ldots,x_{i+1}) = 0$. On obtient une certaine identité faisant intervenir les $i+1$ variables $x_1,\ldots,x_{i+1}$. Faisons parcourir à x_{i+1} le groupe G, et ajoutons les identités ainsi obtenues. Si l'on pose :

$$g(x_1,\ldots,x_{i-1}) = \sum_{x_i \in \mathrm{G}} f(x_1,\ldots,x_i)\,,$$

on obtient $nf = (-1)^i \delta g$.