SÉMINAIRE DE GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE
DU BOIS MARIE

1960–61

REVÊTEMENTS ÉTALES ET GROUPE FONDAMENTAL
(SGA 1)

Un séminaire dirigé par A. Grothendieck

Augmenté de deux exposés de
Mme M. Raynaud

Édition recomposée et annotée du volume 224 des Lecture Notes in Mathematics publié en 1971 par Springer-Verlag

Documents Mathématiques

série dirigée par Pierre COLMEZ

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Documents Mathématiques
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 1629-4939

ISBN 2-85629-141-4

Directeur de la publication : Michel WALDSCHMIDT

DOCUMENTS MATHÉMATIQUES 3

SÉMINAIRE DE GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE
DU BOIS MARIE
1960–61

REVÊTEMENTS ÉTALES ET GROUPE FONDAMENTAL
(SGA 1)

Un séminaire dirigé par A. Grothendieck

Augmenté de deux exposés de
Mme M. Raynaud

Édition recomposée et annotée du volume 224 des Lecture Notes in Mathematics publié en 1971 par Springer-Verlag

Société Mathématique de France 2003

PRÉFACE

Le présent texte est une édition recomposée et annotée du livre « Revêtements Étales et Groupe Fondamental », Lecture Notes in Mathematics, 224, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1971, par Alexander Grothendieck et al.

La composition en LaTeX2e a été réalisée par des volontaires, participant à un projet dirigé par Bas Edixhoven, dont on trouvera plus de détails à l'adresse `http://www.math.leidnuniv.nl/~edix/`. La mise en page a été terminée par la Société mathématique de France.

Ceci est une *version légèrement corrigée* du texte original. Elle est éditée par la Société mathématique de France (`http://smf.emath.fr/`) dans la série « Documents Mathématiques ». Quelques mises à jour ont été effectuées par Michel Raynaud. Celles-ci sont délimitées par des crochets **[ ]** et indiquées par le symbole (MR) (remarques pages 211, 220, 256, 292 et note 7 page 67). Afin d'uniformiser les notations, le corps résiduel d'un point x est noté $k(x)$, et celui d'un anneau local A est noté $k(A)$.

Il existe également une version électronique censée reproduire le texte original.

Les deux versions ont un seul fichier source commun, se trouvant sur le serveur des archives arXiv.org e-Print à `http://arxiv.org/`. Les différences entre les deux versions sont documentées dans le fichier source.

L'ancienne numérotation des pages est incorporée dans la marge (le nombre n indiquant le début de la page n).

The present text is a new updated edition of the book “Revêtements Étales et Groupe Fondamental”, Lecture Notes in Mathematics, 224, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1971, by Alexander Grothendieck et al.

Typesetting in LaTeX2e was done by volunteers, participating in a project directed by Bas Edixhoven, on which one can find more details at `http://www.math.leidnuniv.nl/~edix/`. It has been completed by the Société mathématique de France.

This is a slightly *corrected version* of the original text. It is published by the Société mathématique de France (`http://smf.emath.fr/`) as a volume of the series “Documents Mathématiques”. Some updating remarks have been added by Michel Raynaud. These are bounded by brackets **[ ]** and indicated by the symbol (MR) (Remarks on pages 211, 220, 256, 292 and footnote 7 on page 67). In order to unify notation, the residue field of a point x is denoted by $k(x)$ and the residue field of a local ring A is denoted by $k(A)$.

There also exists an electronic version that is meant to reproduce the original text.

Both versions are produced from the same source file, that can be downloaded from the arXiv.org e-Print server at `http://arxiv.org/`. All differences between the two versions are documented in the source file.

The old page numbering is incorporated in the margin (the number n marking the beginning of page n).

INTRODUCTION

Dans la première partie de cette introduction, nous donnons des précisions sur le contenu du présent volume ; dans la deuxième, sur l'ensemble du « *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie* », dont le présent volume constitue le tome premier.

1. Le présent volume présente les fondements d'une théorie du groupe fondamental en Géométrie Algébrique, dans le point de vue « kroneckerien » permettant de traiter sur le même pied le cas d'une variété algébrique au sens habituel, et celui d'un anneau des entiers d'un corps de nombres, par exemple. Ce point de vue ne s'exprime d'une façon satisfaisante que dans le langage des schémas, et nous utiliserons librement ce langage, ainsi que les résultats principaux exposés dans les trois premiers chapitres des *Éléments de Géométrie Algébrique* de J. Dieudonné et A. Grothendieck, (cité EGA dans la suite). L'étude du présent volume du « *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie* » ne demande pas d'autres connaissances de la Géométrie Algébrique, et peut donc servir d'introduction aux techniques actuelles de Géométrie Algébrique, à un lecteur désireux de se familiariser avec ces techniques.

Les exposés I à XI de ce livre sont une reproduction textuelle, pratiquement inchangée, des notes miméographiées du Séminaire oral, qui étaient distribuées par les soins de l'*Institut des Hautes Études Scientifiques*(1). Nous nous sommes bornés à rajouter quelques notes de bas de page au texte primitif, de corriger quelques erreurs de frappe, et de faire un ajustage terminologique, le mot « morphisme simple » ayant notamment été remplacé entre-temps par celui de « morphisme lisse », qui ne prête pas aux mêmes confusions.

Les exposés I à IV présentent les notions locales de morphisme *étale* et de morphisme *lisse* ; ils n'utilisent guère le langage des schémas, exposé dans le Chapitre I

(1) Ainsi que les notes des séminaires faisant suite à celui-ci. Ce mode de distribution s'étant avéré impraticable et insuffisant à la longue, tous les « *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie* » paraîtront désormais sous forme de livre comme le présent volume.

des *Éléments*[2]. L'exposé V présente la description axiomatique du groupe fondamental d'un schéma, utile même dans le cas classique où ce schéma se réduit au spectre d'un corps, où on trouve une reformulation fort commode de la théorie de Galois habituelle. Les exposés VI et VIII présentent la *théorie de la descente*, qui a pris une importance croissance en Géométrie Algébrique dans ces dernières années, et qui pourrait rendre des services analogues en Géométrie Analytique et en Topologie. Il convient de signaler que l'exposé VII n'avait pas été rédigé, et sa substance se trouve incorporée dans un travail de J. Giraud (Méthode de la Descente, Bull. Soc. Math. France, Mémoire 2, 1964, viii + 150 p.). Dans l'exposé IX, on étudie plus spécifiquement la descente des morphismes étales, obtenant une approche systématique pour des théorèmes du type de Van Kampen pour le groupe fondamental, qui apparaissent ici comme de simples traductions de théorèmes de descente. Il s'agit essentiellement d'un procédé de calcul du groupe fondamental d'un schéma connexe X, muni d'un morphisme surjectif et propre, disons $X' \to X$, en termes des groupes fondamentaux des composantes connexes de X' et des produits fibrés $X' \times_X X'$, $X' \times_X X' \times_X X'$, et des homomorphismes induits entre ces groupes par les morphismes simpliciaux canoniques entre les schémas précédents. L'exposé X donne la théorie de la *spécialisation du groupe fondamental*, pour un morphisme propre et lisse, dont le résultat le plus frappant consiste en la détermination (à peu de chose près) du groupe fondamental d'une courbe algébrique lisse en caractéristique $p > 0$, grâce au résultat connu par voie transcendante en caractéristique nulle. L'exposé XI donne quelques exemples et compléments, en explicitant notamment sous forme cohomologique la théorie des revêtements de Kummer, et celle d'Artin-Schreier. Pour d'autres commentaires sur le texte, voir l'*Avertissement* à la version multigraphiée, qui fait suite à la présente Introduction.

Depuis la rédaction en 1961 du présent Séminaire a été développé, en collaboration par M. Artin et moi-même, le langage de la *topologie étale* et une théorie cohomologique correspondante, exposée dans la partie SGA 4 « Cohomologie étale des schémas » du *Séminaire de Géométrie Algébrique*, à paraître dans la même série que le présent volume. Ce langage, et les résultats dont il dispose dès à présent, fournissent un outil particulièrement souple pour l'étude du groupe fondamental, permettant de mieux comprendre et de dépasser certains des résultats exposés ici. Il y aurait donc lieu de reprendre entièrement la théorie du groupe fondamental de ce point de vue (tous les résultats-clefs figurant en fait dès à présent dans loc. cit.). C'est ce qui était projeté pour le chapitre des *Éléments* consacré au groupe fondamental, qui devait contenir également plusieurs autres développements qui n'ont pu trouver leur place ici (s'appuyant sur la technique de résolution des singularités) : calcul du « groupe fondamental local » d'un anneau local complet en termes d'une résolution des singularités convenable de cet anneau, formules de Künneth locales et globales

[2]Une étude plus complète est maintenant disponible dans les *Éléments*, Chap IV, §§ 17 et 18.

pour le groupe fondamental sans hypothèse de propreté (cf. Exp. XIII), les résultats de M. Artin sur la comparaison des groupes fondamentaux locaux d'un anneau local hensélien excellent et de son complété (SGA 4 XIX). Signalons également la nécessité de développer une théorie du groupe fondamental d'un topos, qui englobera à la fois la théorie topologique ordinaire, sa version semi-simpliciale, la variante « profinie » développée dans l'exposé V du présent volume, et la variante pro-discrète un peu plus générale de SGA 3 X 7 (adaptée au cas de schémas non normaux et non unibranches). En attendant une refonte d'ensemble de la théorie dans cette optique, l'exposé XIII de Mme Raynaud, utilisant le langage et les résultats de SGA 4, est destiné à montrer le parti qu'on peut tirer dans quelques questions typiques, en généralisant notamment certains résultats de l'exposé X à des schémas relatifs non propres. On y donne en particulier la structure du groupe fondamental « premier à p » d'une courbe algébrique non complète en caractéristique quelconque (que j'avais annoncée en 1959, mais dont une démonstration n'avait pas été publiée à ce jour).

Malgré ces nombreuses lacunes et imperfections (d'autres diront : à cause de ces lacunes et imperfections), je pense que le présent volume pourra être utile au lecteur qui désire se familiariser avec la théorie du groupe fondamental, ainsi que comme ouvrage de référence, en attendant la rédaction et la parution d'un texte échappant aux critiques que je viens d'énumérer.

2. Le présent volume constitue le tome 1 du « *Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie* », dont les volumes suivants sont prévus pour paraître dans la même série que celui-ci. Le but que se propose le *Séminaire*, parallèlement au traité « *Éléments de Géométrie Algébrique* » de J. Dieudonné et A. Grothendieck, est de jeter les fondements de la Géométrie Algébrique, suivant les points de vue dans ce dernier ouvrage. La référence standard pour tous les volumes du *Séminaire* est constituée par les Chapitres I, II, III des « *Éléments de Géométrie Algébrique* » (cités EGA I, II, III), et on suppose le lecteur en possession du bagage d'algèbre commutative et l'algèbre homologique que ces chapitres impliquent(3). De plus, dans chaque volume du *Séminaire* il sera référé librement, dans le mesure des besoins, à des volumes antérieurs du même *Séminaire*, ou à d'autres chapitres publiés ou sur le point de paraître des « Éléments ».

Chaque *partie* du *Séminaire* est centrée sur un sujet principal, indiqué dans le titre du ou des volumes correspondants ; le séminaire oral porte généralement sur une année académique, parfois plus. Les exposés à l'intérieur de chaque partie du *Séminaire* sont généralement dans une dépendance logique étroite les uns par rapport aux autres ; par contre, les différentes parties du *Séminaire* sont dans une large mesure logiquement indépendants les uns par rapport aux autres. Ainsi, la partie « Schémas en Groupes » est à peu près entièrement indépendante des deux parties du *Séminaire* qui

(3) Voir l'Introduction à EGA I pour des précisions à ce sujet.

la précèdent chronologiquement ; par contre, elle fait un fréquent appel aux résultats de EGA IV. Voici la liste des parties du *Séminaire* qui doivent paraître prochainement (cités SGA 1 à SGA 7 dans la suite) :

SGA 1. Revêtements étales et groupe fondamental, 1960 et 1961.

SGA 2. Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux, 1961/62.

SGA 3. Schémas en groupes, 1963 et 1964 (3 volumes), en coll. avec M. Demazure.

SGA 4. Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, 1963/64 (3 volumes), (en coll. avec M. Artin et J.L. Verdier).

SGA 5. Cohomologie ℓ-adique et fonctions L, 1964 et 1965 (2 volumes).

SGA 6. Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch, 1966/67 (2 volumes) (en coll. avec P. Berthelot et L. Illusie).

SGA 7. Groupes de monodromie locale en géométrie algébrique.

Trois parmi ces *Séminaires* partiels ont été dirigés en *collaboration* avec d'autres mathématiciens, qui figureront comme co-auteurs sur la couverture des volumes correspondants. Quant aux autres participants actifs du *Séminaire*, dont le rôle (tant au point de vue rédactionnel que de celui du travail de mise au point mathématique) est allé croissant d'année en année, le nom de chaque participant figure en tête des exposés dont il est responsable comme conférencier ou comme rédacteur, et la liste de ceux qui figurent dans un volume déterminé se trouve indiquée sur la page de garde dudit volume.

Il convient de donner quelques précisions sur les rapports entre le *Séminaire* et les *Éléments*. Ces derniers étaient destinés en principe à donner un exposé d'ensemble des notions et techniques jugées les plus fondamentales dans la Géométrie Algébrique, à mesure que ces notions et techniques elles-mêmes se dégagent, par le jeu naturel d'exigences de cohérence logique et esthétique. Dans cette optique, il était naturel de considérer le *Séminaire* comme une version préliminaire des *Éléments*, destinée à être englobée à peu près totalement, tôt ou tard, dans ces derniers. Ce processus avait déjà commencé dans une certaine mesure il y a quelques années, puisque les exposés I à IV du présent volume SGA 1 sont entièrement englobés par EGA IV, et que les exposés VI à VIII devaient l'être d'ici quelques années dans EGA VI. Cependant, à mesure que se développe le travail d'édification entrepris dans les *Éléments* et dans le *Séminaire*, et que les proportions d'ensemble se précisent, le principe initial (d'après lequel le *Séminaire* ne constituerait qu'une version préliminaire et provisoire) apparaît de moins en moins réaliste en raison (entre autres) des limites imposées par la prévoyante nature à la durée de la vie humaine. Compte tenu du soin généralement apporté dans la rédaction des différentes parties du *Séminaire*, il n'y aura lieu sans doute de reprendre une telle partie dans les *Éléments* (ou des traités qui en prendraient la relève) que lorsque des progrès ultérieurs à la rédaction permettront d'y apporter des améliorations très substantielles, aux prix de modifications assez profondes. C'est le cas dès à présent pour le présent séminaire SGA 1, comme on l'a dit plus haut, et également pour SGA 2 (grâce aux résultats récents de Mme Raynaud). Par contre, rien n'indique actuellement qu'il en sera ainsi dans un proche avenir pour aucune des parties citées plus haut SGA 3 à SGA 7.

Les références à l'intérieur du « Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie » sont données ainsi. Une *référence intérieure* à une des parties SGA 1 à SGA 7 du Séminaire est donnée dans le style III 9.7, où le chiffre III désigne le numéro de l'exposé, qui figure en haut de chaque page de l'exposé en question, et 9.7 le numéro de l'énoncé (ou de la définition, remarque, etc.) à l'intérieur de l'exposé. Le cas échéant, des nombres décimaux plus longs peuvent être utilisés, par exemple 9.7.1, 9.7.2 pour désigner par exemple les diverses étapes dans la démonstration d'une proposition 9.7. La référence III 9 désigne la paragraphe 9 de l'exposé III. Le numéro de l'exposé est omis pour les références internes à un exposé. Pour une *référence à une autre* des *parties* du *Séminaire*, on utilise les mêmes sigles, mais précédés de la mention de la partie en question des SGA, SGA 1 III 9.7. De même, la référence EGA IV 11.5.7 signifie : Éléments de Géométrie Algébrique, Chap. IV, énoncé (ou définition etc.) 11.5.7 ; ici, le premier chiffre arabe désigne encore le numéro du paragraphe. À part ces conventions en vigueur dans l'ensemble des SGA, la bibliographie relative à un exposé sera généralement rassemblée à la fin de celui-ci, et il y sera référé à l'intérieur de l'exposé par des numéros entre crochets comme [**3**], suivant l'usage.

Enfin, pour la commodité du lecteur, chaque fois que cela semblera nécessaire, nous joindrons à la fin des volumes des SGA un index des notations, et un index terminologique contenant s'il y a lieu une traduction anglaise des termes français utilisés.

Je tiens à joindre à cette introduction un commentaire extra-mathématique. Au mois de novembre 1969 j'ai eu connaissance du fait que l'Institut des Hautes Études Scientifiques, dont j'ai été professeur essentiellement depuis sa fondation, recevait depuis trois ans des subventions du Ministère des Armées. Déjà comme chercheur débutant j'ai trouvé extrêmement regrettable le peu de scrupules que se font la plupart des scientifiques pour accepter de collaborer sous une forme ou une autre avec les appareils militaires. Mes motivations à ce moment étaient essentiellement de nature morale, donc peu susceptibles d'êtres prises au sérieux. Aujourd'hui elles acquièrent une force et une dimension nouvelle, vu le danger de destruction de l'espèce humaine dont nous menace la prolifération des appareils militaires et des moyens de destruction massives dont ces appareils disposent. Je me suis expliqué ailleurs de façon plus détaillée sur ces questions, beaucoup plus importantes que l'avancement de n'importe quelle science (y compris la mathématique) ; on pourra par exemple consulter à ce sujet l'article de G. Edwards dans le n$^{\text{o}}$ 1 du journal Survivre (Août 1970), résumant un exposé plus détaillé de ces questions que j'avais fait ailleurs. Ainsi, je me suis trouvé travailler pendant trois ans dans une institution alors qu'elle participait à mon insu à un mode de financement que je considère comme immoral et dangereux[4]. Étant à présent seul à avoir cette opinion parmi mes collègues à l'IHES, ce qui a condamné à l'échec mes efforts pour obtenir la suppression des subventions militaires du budget de l'IHES, j'ai pris la décision qui s'imposait et quitte l'IHES le 30 septembre 1970 et suspends également toute collaboration scientifique avec cette institution, aussi longtemps qu'elle continuera à accepter de telles subventions. J'ai demandé à M. Motchane, directeur de l'IHES, que l'IHES s'abstienne à partir du 1er octobre 1970 de diffuser des textes mathématiques dont je suis auteur, ou faisant partie du Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie. Comme il a été dit plus haut, la diffusion de ce séminaire va être assurée par la maison Julius Springer, dans le série des Lecture Notes. Je suis heureux de remercier ici la maison Springer et Monsieur K. Peters pour l'aide efficace et courtoise qu'ils m'ont apportée pour rendre possible cette publication, en se chargeant en particulier de la frappe pour la photooffset des nouveaux exposés rajoutés aux anciens séminaires, et des exposés manquants des séminaires incomplets.

Je remercie également M. J.P. Delale, qui s'est chargé du travail ingrat de compiler l'index des notations et l'index terminologique.

Massy, août 1970.

[4] Il va de soi que l'opinion que je viens d'exprimer n'engage que ma propre responsabilité, et non pas celle de la maison d'édition Springer qui édite le présent volume.

AVERTISSEMENT

Chacun des exposés rédigés donne la substance de plusieurs exposés oraux consécutifs. Il n'a pas semblé utile d'en préciser les dates.

L'exposé VII, auquel il est référé à diverses reprises au cours de l'exposé VIII, n'a pas été rédigé par le conférencier, qui dans les conférences orales s'était borné à esquisser le langage de la descente dans les catégories générales, en se plaçant à un point de vue strictement utilitaire et sans entrer dans les difficultés logiques soulevées par ce langage. Il est apparu qu'un exposé correct de ce langage sortirait des limites des présentes notes, ne serait-ce que par sa longueur. Pour un exposé en forme de la théorie de la descente, je renvoie à un article en préparation de Jean Giraud. En attendant sa parution[(5)], je pense qu'un lecteur attentif n'aura pas de peine à suppléer par ses propres moyens aux références fantômes de l'Exposé VIII.

D'autres exposés oraux, se plaçant après l'Exposé XI, et auxquels il est fait allusion à certains endroits du texte, n'ont pas non plus été rédigés, et étaient destinés à former la substance d'un Exposé XII et d'un Exposé XIII. Les premiers de ces exposés oraux reprenaient, dans le cadre des schémas et des espaces analytiques avec éléments nilpotents (tels qu'ils sont introduits dans le Séminaire Cartan 1960/61) la construction de l'espace analytique associé à un préschéma localement de type fini sur un corps valué complet k, les théorèmes du type GAGA dans le cas où k est le corps des complexes, et l'application à la comparaison du groupe fondamental défini par voie transcendante et le groupe fondamental étudié dans ces notes (comparer A. Grothendieck, Fondements de la Géométrie Algébrique, Séminaire Bourbaki n° 190, page 10, décembre 1959). Les derniers exposés oraux esquissaient la généralisation des méthodes développées dans le texte pour l'étude des revêtements admettant de la ramification modérée, et de la structure du groupe fondamental d'une courbe complète privée d'un nombre fini de points (comparer loc. cit., n° 182, page 27, théorème 14). Ces exposés n'introduisent

[(5)] Actuellement paru : J. Giraud, *Méthodes de la descente*, Mémoire n° 2 de la Société mathématiques de France, 1964.

aucune idée essentiellement nouvelle, c'est pourquoi il n'a pas semblé indispensable d'en donner une rédaction en forme avant la parution des chapitres correspondants des Éléments de Géométrie Algébrique[(6)].

Par contre, les théorèmes du type Lefschetz pour le groupe fondamental et le groupe de Picard, tant au point de vue local que global, ont fait l'objet d'un Séminaire séparé en 1962, qui a été complètement rédigé et est à la disposition des usagers[(7)]. Signalons que les résultats développés tant dans le présent Séminaire que dans celui de 1962 seront utilisés de façon essentielle dans la parution de plusieurs résultats clefs dans la cohomologie étale des préschémas, qui feront l'objet d'un Séminaire (conduit par M. Artin et moi-même) en 1963/64, actuellement en préparation[(8)].

Les exposés I à IV, de nature essentiellement locale et très élémentaire, seront absorbés entièrement par le chapitre IV des *Éléments de Géométrie Algébrique*, dont la première partie est à l'impression et qui sera sans doute publié vers fin 64. Ils pourront néanmoins être utiles à un lecteur qui désirerait se mettre au courant des propriétés essentielles des morphismes lisses, étales ou plats, avant d'entrer dans les arcanes d'un traité systématique. Quant aux autres exposés, ils seront absorbés dans le chapitre VIII[(9)] des « Éléments », dont la publication ne pourra guère être envisagée avant plusieurs années.

Bures, juin 1963.

[(6)] Ils sont inclus dans le présent volume dans l'Exp. XII de Mme Raynaud avec une démonstration différente de la démonstration originale exposée dans le Séminaire oral (cf. introduction).

[(7)] *Cohomologie étale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux* (SGA 2), paru dans North Holland Pub. Cie.

[(8)] *Cohomologie étale des schémas* (cité SGA 4), à paraître dans cette même série.

[(9)] En fait, par suite de modification du plan initialement prévu pour les *Éléments*, l'étude du groupe fondamental y est reportée à un chapitre ultérieur à celui qu'on vient d'indiquer. Comparer l'introduction qui précède le présent « Avertissement ».

TABLE DES MATIÈRES