

PANORAMAS ET SYNTHÈSES 3

**INTRODUCTION À LA
THÉORIE DE HODGE**

**José Bertin, Jean-Pierre Demailly
Luc Illusie, Chris Peters**

Société Mathématique de France 1996

AMS Subject classification : 14C30, 14D07, 14F17, 13A35, 58A14

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & & 1 & & \\
& & & & 0 & & \\
& & & 0 & h^{1,1} & & 0 \\
& & 0 & h^{2,1} & & h^{1,2} & \\
1 & & & & h^{1,1} & & 0 \\
& & 0 & & 0 & & 0 \\
& & & & 1 & & \\
& & & & & & 1
\end{array}$$

INTRODUCTION À LA THÉORIE DE HODGE

José Bertin, Jean-Pierre Demailly

Luc Illusie, Chris Peters

Le présent ouvrage développe un certain nombre d'éléments fondamentaux de la théorie de Hodge. Il est destiné principalement aux étudiants et chercheurs non spécialistes du sujet, qui souhaitent se familiariser en profondeur avec celui-ci et se faire une idée de l'état actuel de la recherche. Le texte comporte trois parties consacrées à des aspects variés et complémentaires de la théorie : aspects analytiques (méthodes L^2), algébriques (utilisation de la caractéristique p), et enfin applications à la géométrie algébrique au travers de l'étude des variations de structure de Hodge et des conjectures de symétrie miroir pour les variétés de Calabi-Yau.

This monograph develops a number of fundamental concepts and results of Hodge Theory. It is mainly aimed to students and researchers, non-experts in the field, who wish to get acquainted in depth with the subject and obtain precise up-to-date information on the current status of the theory. The manuscript is divided in three parts, each of them devoted to various and complementary aspects of the theory : analytic aspects (L^2 methods), algebraic aspects (use of characteristic p methods), applications to algebraic geometry through a study of variations of Hodge structures and mirror symmetry conjectures for Calabi-Yau manifolds.

Table des matières

Avant-propos	1
Théorie de Hodge L^2 et théorèmes d'annulation par Jean-Pierre Demailly.....	3
0. Introduction	3
Partie I : Théorie de Hodge L^2	
1. Fibrés vectoriels, connexions et courbure	8
2. Opérateurs différentiels sur les fibrés vectoriels	12
3. Résultats fondamentaux sur les opérateurs elliptiques	14
4. Théorie de Hodge des variétés riemanniennes compactes	20
5. Variétés hermitiennes et kählériennes	25
6. Identités de la géométrie kählérienne	29
7. Groupes $\mathcal{H}^{p,q}(X, E)$ et dualité de Serre	38
8. Cohomologie des variétés kählériennes compactes	40
9. Suite spectrale de Hodge-Frölicher	46
10. Déformations et théorèmes de semi-continuité	52
Partie II : Estimations L^2 et théorèmes d'annulation	
11. Concepts de pseudoconvexité et de positivité	60
12. Théorie de Hodge des variétés kählériennes complètes	68
13. Méthode de Bochner et théorèmes d'annulation	80
14. Estimations L^2 et théorèmes d'existence	83
15. Théorèmes d'annulation de Nadel et de Kawamata-Viehweg	86
16. Sur la conjecture de Fujita	94
17. Une version effective du grand théorème de Matsusaka	102
Références	108
Frobenius et dégénérescence de Hodge par Luc Illusie	113
0. Introduction	113
1. Schémas : différentielles, complexe de de Rham	116

2. Lissité et relèvements	120
3. Frobenius et isomorphisme de Cartier	128
4. Catégories dérivées et suites spectrales	134
5. Théorèmes de décomposition, de dégénérescence et d'annulation en caractéristique p	140
6. De la caractéristique p à la caractéristique nulle	147
7. Développements récents et problèmes ouverts	155
8. Appendice : parallélisabilité et ordinarité	163
Références	166

Variations de structures de Hodge, variétés de Calabi-Yau et symétrie miroir

par José Bertin et Chris Peters 171

0. Introduction 171

Partie I. Variations de structures de Hodge 177

1. Fibrés de Hodge 177

2. Connexion de Gauss-Manin 180

3. Variations de structures de Hodge 190

4. Dégénérescences 199

5. Fibrés de Higgs 209

6. Modules de Hodge 210

Partie II. Symétrie miroir et variétés de Calabi-Yau 215

7. Introduction à la symétrie miroir 215

8. Cohomologie d'une hypersurface 222

9. Equations de Picard-Fuchs 229

10. Variétés de Calabi-Yau et symétrie miroir 235

11. Lien avec la théorie de Hodge mixte 249

Bibliographie 256

Index 261

Abstract 273

Contents 275

Avant-propos

Les trois textes regroupés dans cet ouvrage sont consacrés à une présentation d'aspects variés – et importants à divers titres – de la théorie de Hodge. Ils reprennent avec des compléments substantiels les exposés oraux présentés lors de la session “l'Etat de la Recherche” sur la Théorie de Hodge, qui a eu lieu à l'Université Joseph Fourier de Grenoble du Vendredi 25 au Dimanche 27 novembre 1994, sous l'égide de la Société Mathématique de France. Le but des auteurs serait atteint si, conformément à l'esprit des sessions l'Etat de la Recherche, cet ouvrage permettait au lecteur non nécessairement spécialiste de se faire une idée précise de l'état de l'art.

Les trois thèmes abordés (Théorie de Hodge L^2 et théorèmes d'annulation, Frobenius et dégénérescence de Hodge, Variations de structures de Hodge et symétrie miroir) recouvrent une grande diversité de techniques : équations aux dérivées partielles elliptiques, géométrie différentielle complexe, géométrie algébrique en caractéristique p , méthodes cohomologiques et faisceautiques, théorie des déformations des variétés complexes, variétés de Calabi-Yau, théorie des singularités . . . Cette accumulation d'outils venant de divers horizons rend sans doute assez difficile l'accès de la théorie au néophyte. Nous espérons que les textes ci-après permettront de faciliter quelque peu cet accès : un effort particulier a été fait pour aborder les divers thèmes par leur point de départ le plus naturel, chacun des textes étant complété par une introduction détaillée et de nombreuses références. Le lecteur y trouvera posés un bon nombre de problèmes ouverts ayant fait l'objet d'actives recherches dans les dernières années.

Les auteurs sont vivement reconnaissants envers la SMF et le MESR pour leur impulsion décisive – à la fois psychologique et financière – sans laquelle la session “Théorie de Hodge” de Grenoble n'aurait pu voir le jour. Ils remercient tout particulièrement le Comité des Sessions l'Etat de la Recherche en les personnes de ses deux responsables successifs Pierre Schapira et Colette Mœglin, ainsi que Michèle Audin, Rédactrice en Chef de la revue Panoramas et Synthèses, pour ses vifs encouragements à y publier le présent manuscrit. Enfin leurs remerciements vont au referee pour sa lecture approfondie du texte et ses très nombreuses suggestions d'amélioration.

le 27 novembre 1995,

José Bertin*, Jean-Pierre Demailly*, Luc Illusie**, Chris Peters*

* Université de Grenoble I, Institut Fourier,
BP74, 38402 Saint-Martin d'Hères, France

** Université de Paris-Sud, Département de Mathématiques,
Bâtiment 425, 91405 Orsay, France

Théorie de Hodge L^2 et Théorèmes d'annulation

Jean-Pierre Demailly

Université de Grenoble I

Institut Fourier, BP 74

38402 Saint-Martin d'Hères, France

0. Introduction

L'objet de ces notes est de décrire deux applications fondamentales des techniques hilbertiennes L^2 à la géométrie analytique ou algébrique : la théorie de Hodge d'une part, la théorie des estimations L^2 pour l'opérateur $\bar{\partial}$ d'autre part. Le point de vue adopté ici sera essentiellement analytique.

La première partie est consacrée à la théorie de Hodge et se veut avant tout introductive. Le lecteur ne trouvera donc ici que les aspects les plus élémentaires, dus pour la plupart à W.V.D. Hodge lui-même [Hod41] ou à A. Weil [Wei57]. La théorie de Hodge, dans le sens premier conçu par son créateur, consiste en l'étude de la cohomologie des variétés riemanniennes ou kählériennes, à partir d'une description des formes harmoniques et de leurs propriétés. Nous renvoyons aux textes de J. Bertin-Ch. Peters [BePe95] et L. Illusie [Ill95] pour une présentation d'aspects et d'applications plus avancés (variations de structures de Hodge, application des périodes, théorie de Hodge en caractéristique > 0 ...). Considérons une variété riemannienne X et un fibré euclidien ou hermitien E sur X . On suppose que E est muni d'une connexion D compatible avec la métrique : une connexion est par définition un opérateur de dérivation analogue à la différentiation extérieure, agissant sur les formes de degré quelconque à valeurs dans E , et satisfaisant la règle de Leibniz pour le produit extérieur. L'opérateur de Laplace-Beltrami associé est l'opérateur différentiel autoadjoint du second ordre $\Delta_E = D_E D_E^* + D_E^* D_E$, où D_E^* est l'adjoint hilbertien de D_E . On vérifie aisément que Δ_E est un opérateur elliptique. Le théorème de finitude pour les opérateurs elliptiques montre alors que l'espace $\mathcal{H}^q(X, E)$ des q -formes harmoniques à valeurs dans E est de dimension finie si X est compacte (on dit qu'une forme u est harmonique si $\Delta_E u = 0$). Si on suppose de plus que la connexion est telle que $D_E^2 = 0$, l'opérateur D_E agissant sur les formes de tous degrés définit un complexe appelé *complexe de De Rham* à valeurs dans le système local de coefficients défini par E . Les groupes de cohomologie correspondants seront notés $H_{\text{DR}}^q(X, E)$. L'observation fondamentale de la théorie de Hodge est que toute classe de cohomologie

contient un unique représentant harmonique dès lors que X est compacte. Il en résulte alors un isomorphisme, dit *isomorphisme de Hodge*

$$(0.1) \quad H_{\text{DR}}^q(X, E) \simeq \mathcal{H}_{\text{DR}}^q(X, E).$$

Lorsque la variété X et le fibré E sont holomorphes, il existe une connexion unique D_E appelée *connexion de Chern*, compatible avec la métrique hermitienne de E et ayant les propriétés suivantes : D_E se scinde en la somme $D_E = D'_E + D''_E$ d'une connexion D'_E de type $(1, 0)$ et d'une connexion D''_E de type $(0, 1)$, telles que $D_E^2 = D_E'^2 = 0$ et $D'_E D''_E + D''_E D'_E = \Theta(E)$ (tenseur de courbure de Chern du fibré). L'opérateur D''_E agissant sur les formes de bidegré (p, q) définit alors pour p fixé un complexe appelé *complexe de Dolbeault*. Lorsque X est compacte, les groupes de cohomologie de Dolbeault $H^{p,q}(X, E)$ satisfont un isomorphisme de Hodge analogue à (0.1), à savoir

$$(0.2) \quad H^{p,q}(X, E) \simeq \mathcal{H}^{p,q}(X, E),$$

où $\mathcal{H}^{p,q}(X, E)$ désigne l'espace des (p, q) -formes harmoniques à valeurs dans E , relativement au Laplacien anti-holomorphe $\Delta''_E = D''_E D''_E{}^* + D''_E{}^* D''_E$. En utilisant ce dernier résultat, on démontre facilement le *théorème de dualité de Serre*

$$(0.3) \quad H^{p,q}(X, E)^* \simeq H^{n-p, n-q}(X, E^*), \quad n = \dim_{\mathbb{C}} X,$$

qui est le pendant complexe du théorème de dualité de Poincaré. Le théorème central de la théorie de Hodge concerne les variétés kählériennes compactes : une variété hermitienne (X, ω) est dite *kählérienne* si la $(1, 1)$ -forme hermitienne $\omega = i \sum_{j,k} \omega_{j\bar{k}} dz_j \wedge d\bar{z}_k$ est telle que $d\omega = 0$. Un exemple fondamental de variété kählérienne compacte est donné par les variétés algébriques projectives. Si X est kählérienne compacte et si E est un système local de coefficients sur X , le *théorème de décomposition de Hodge* affirme que

$$(0.4) \quad H_{\text{DR}}^k(X, E) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X, E) \quad (\text{décomposition de Hodge})$$

$$(0.5) \quad \overline{H^{p,q}(X, E)} \simeq H^{q,p}(X, E^*), \quad (\text{symétrie de Hodge}).$$

Le caractère intrinsèque de la décomposition sera démontré ici de manière quelque peu originale, via l'utilisation des groupes de cohomologie de Bott-Chern (groupes de $\partial\bar{\partial}$ -cohomologie). Il découle de ces résultats que les nombres de Hodge $h^{p,q} = \dim_{\mathbb{C}} H^{p,q}(X, \mathbb{C})$ vérifient la propriété de symétrie $h^{p,q} = h^{q,p} = h^{n-p, n-q} = h^{n-q, n-p}$, et qu'ils sont liés aux nombres de Betti $b_k = \dim_{\mathbb{C}} H_{\text{DR}}^k(X, \mathbb{C})$ par la relation $b_k = \sum_{p+q=k} h^{p,q}$. Un certain nombre d'autres propriétés cohomologiques remarquables des variétés kählériennes compactes s'obtient au moyen de la décomposition primitive et du théorème de Lefschetz difficile (lequel résulte à son tour de l'existence d'une action de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ sur les formes harmoniques). Ces résultats permettent de décrire de façon précise la structure du groupe de Picard $\text{Pic}(X) = H^1(X, \mathcal{O}^*)$ dans le

cas kählérien. Dans un contexte plus général, nous explicitons la suite spectrale de Hodge-Frölicher (suite spectrale reliant la cohomologie de Dolbeault à la cohomologie de De Rham), et nous montrons comment on peut utiliser cette suite spectrale pour obtenir quelques résultats généraux sur les nombres de Hodge $h^{p,q}$ des variétés complexes compactes. Finalement, nous établissons la semi-continuité des dimensions des groupes de cohomologie $H^q(X_t, E_t)$ sur les fibres d'une fibration holomorphe propre et lisse $\mathcal{X} \rightarrow S$ (résultat dû à Kodaira-Spencer), et nous en déduisons que les nombres de Hodge $h^{p,q}(X_t)$ sont constants si les fibres X_t sont kählériennes (invariance des $h^{p,q}$ par déformations); le caractère holomorphe de la filtration de Hodge $F^p H^k(X_t, \mathbb{C}) = \bigoplus_{r \geq p} H^{r, k-r}(X_t, \mathbb{C})$ relativement à la connexion de Gauss-Manin est démontré au moyen du théorème de cohérence des images directes, appliqué au complexe de De Rham relatif $\Omega_{\mathcal{X}/S}^\bullet$ de $\mathcal{X} \rightarrow S$.

Dans la seconde partie, après quelques rappels sur les notions de positivité et pseudoconvexité mises en jeu, nous établissons l'*identité de Bochner-Kodaira-Nakano* reliant les Laplaciens Δ'_E et Δ''_E . L'identité en question fournit une expression explicite de la différence $\Delta''_E - \Delta'_E$ en termes de la courbure $\Theta(E)$ du fibré. Sous des hypothèses adéquates (faible pseudoconvexité de X , positivité de la courbure de E), on aboutit à une estimation a priori

$$\|D''_E u\|^2 + \|D''_E^* u\|^2 \geq \int_X \lambda(z) |u|^2 dV(z)$$

où λ est une fonction positive dépendant des valeurs propres de courbure. L'inégalité est ici valide pour toute forme u de bidegré (n, q) , $n = \dim X$, $q \geq 1$, à valeurs dans E , appartenant aux domaines hilbertiens u de D''_E et D''_E^* . Par un argument de dualité hilbertien, on déduit de là le théorème fondamental suivant, dû essentiellement à Hörmander [Hör65] et Andreotti-Vesentini [AV65].

0.6. Théorème. *Soit (X, ω) une variété kählérienne, $\dim X = n$. Supposons que X soit faiblement pseudoconvexe. Soit E un fibré en droites hermitien et soient*

$$\gamma_1(x) \leq \dots \leq \gamma_n(x)$$

les valeurs propres de la forme de courbure $i\Theta(E)$ par rapport à la métrique ω en tout point. Supposons que la courbure soit semi-positif, i.e. $\gamma_1 \geq 0$ partout. Alors pour toute forme $g \in L^2(X, \Lambda^{n,q} T_X^ \otimes E)$ telle que*

$$D''_E g = 0 \quad \text{et} \quad \int_X (\gamma_1 + \dots + \gamma_q)^{-1} |g|^2 dV_\omega < +\infty,$$

il existe $f \in L^2(X, \Lambda^{n,q-1} T_X^ \otimes E)$ telle que*

$$D''_E f = g \quad \text{et} \quad \int_X |f|^2 dV_\omega \leq \int_X (\gamma_1 + \dots + \gamma_q)^{-1} |g|^2 dV_\omega.$$

Une observation importante est que le théorème ci-dessus reste encore valable lorsque la métrique h de E présente des singularités. La métrique h est alors

donnée dans chaque carte par un poids $e^{-2\varphi}$ associé à une fonction φ plurisousharmonique (par définition φ est psh si la matrice des dérivées secondes $(\partial^2\varphi/\partial z_j\partial\bar{z}_k)$, calculée au sens des distributions, est semi-positive en tout point). Compte tenu du Théorème (0.6), il est naturel d'introduire le *faisceau d'idéaux multiplicateur* $\mathcal{J}(h) = \mathcal{J}(\varphi)$, constitué des germes de fonctions holomorphes $f \in \mathcal{O}_{X,x}$ telles que $\int_V |f|^2 e^{-2\varphi}$ converge dans un voisinage V de x assez petit. Un résultat récent de A. Nadel [Nad89] garantit que $\mathcal{J}(\varphi)$ est toujours un faisceau analytique cohérent, quelles que soient les singularités de φ . Dans ce contexte, on déduit de (0.6) la version qualitative suivante, concernant la cohomologie à valeurs dans le faisceau cohérent $\mathcal{O}(K_X \otimes E) \otimes \mathcal{J}(h)$ ($K_X = \Lambda^n T_X^*$ étant le *fibré canonique* de X).

0.7. Théorème d'annulation de Nadel ([Nad89], [Dem93b]). *Soit (X, ω) une variété kählérienne faiblement pseudoconvexe, et soit E un fibré en droites holomorphe sur X muni d'une métrique hermitienne h singulière de poids φ . Supposons qu'il existe une fonction continue positive ε sur X telle que la courbure satisfasse l'inégalité $i\Theta_h(E) \geq \varepsilon\omega$ au sens des courants. Alors*

$$H^q(X, \mathcal{O}(K_X \otimes E) \otimes \mathcal{J}(h)) = 0 \quad \text{pour tout } q \geq 1.$$

En dépit de la relative simplicité des techniques mises en jeu, il s'agit là d'un théorème extrêmement puissant, qui contient à lui seul une bonne partie des résultats les plus fondamentaux de la géométrie analytique ou algébrique. Le théorème (0.7) contient ainsi la solution du problème de Levi (équivalence de la convexité holomorphe et de la pseudoconvexité), les théorèmes d'annulation de Kodaira-Serre, Kodaira-Akizuki-Nakano et de Kawamata-Viehweg pour les variétés algébriques projectives, de même que le théorème de plongement de Kodaira caractérisant ces variétés parmi les variétés complexes compactes. Par son caractère intrinsèque, l'énoncé "analytique" du théorème de Nadel se révèle utile même pour des applications purement algébriques (la version algébrique du théorème, connue sous le nom de théorème d'annulation de Kawamata-Viehweg, utilise la résolution des singularités et ne donne pas une description aussi nette du faisceau multiplicateur $\mathcal{J}(h)$). Dans un travail récent [Siu96], Y.T. Siu a montré le résultat remarquable suivant, en utilisant seulement la formule de Riemann-Roch et un argument de récurrence Noethérienne pour les faisceaux multiplicateurs. La technique est décrite au §16 (avec quelques améliorations mises au point dans [Dem96]).

0.8. Théorème ([Siu96], [Dem96]). *Soit X une variété projective et L un fibré en droites ample (i.e. à courbure positive) sur X . Alors le fibré $K_X^{\otimes 2} \otimes L^{\otimes m}$ est très ample pour $m \geq m_0(n) = 2 + \binom{3n+1}{n}$, où $n = \dim X$.*

L'importance d'avoir une borne effective pour l'entier $m_0(n)$ est qu'on peut ainsi obtenir des plongements de la variété X dans l'espace projectif, avec un contrôle précis du degré du plongement. Il résulte de là une démonstration assez simple d'un théorème de finitude important, à savoir le "*grand théorème de Matsusaka*" (cf. [Mat72], [KoM83], [Siu93], [Dem96]) :

0.9. Grand théorème de Matsusaka. *Soit X une variété projective et L un fibré en droites ample sur X . Il existe une borne $m_1 = m_1(n, L^n, K_X \cdot L^{n-1})$ explicite ne dépendant que de la dimension $n = \dim X$ et des deux premiers coefficients du polynôme de Hilbert de L , telle que mL soit très ample pour $m \geq m_1$.*

De ce théorème, on déduit facilement de nombreux résultats de finitude, en particulier le fait qu'il existe seulement un nombre fini de familles de déformations de variétés projectives polarisées (X, L) , lorsque L est un fibré ample dont les nombres d'intersection L^n et $K_X \cdot L^{n-1}$ sont donnés.

Partie I : Théorie de Hodge L^2

1. Fibrés vectoriels, connexions et courbure

Le but de cette section est de rappeler quelques définitions de base de géométrie différentielle hermitienne liées aux concepts de connexion, courbure et première classe de Chern d'un fibré en droites.

1.A. Cohomologie de Dolbeault et cohomologie des faisceaux

Soit X une variété \mathbb{C} -analytique de dimension n . Nous désignons par $\Lambda^{p,q}T_X^*$ le fibré des formes différentielles de bidegré (p, q) sur X , i.e., les formes différentielles qui peuvent s'écrire

$$u = \sum_{|I|=p, |J|=q} u_{I,J} dz_I \wedge d\bar{z}_J, \quad dz_I := dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p}, \quad d\bar{z}_J := d\bar{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{j_q},$$

où (z_1, \dots, z_n) désignent des coordonnées locales holomorphes, et où $I = (i_1, \dots, i_p)$ et $J = (j_1, \dots, j_q)$ sont des multi-indices (suites croissantes d'entiers de l'intervalle $[1, \dots, n]$, de longueurs $|I| = p$, $|J| = q$). Soit $\mathcal{A}^{p,q}$ le faisceau des germes de formes différentielles de bidegré (p, q) à valeurs complexes et à coefficients C^∞ . Rappelons que la différentielle extérieure d se décompose en $d = d' + d''$ où

$$\begin{aligned} d'u &= \sum_{|I|=p, |J|=q, 1 \leq k \leq n} \frac{\partial u_{I,J}}{\partial z_k} dz_k \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J, \\ d''u &= \sum_{|I|=p, |J|=q, 1 \leq k \leq n} \frac{\partial u_{I,J}}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J \end{aligned}$$

sont de type $(p+1, q)$, $(p, q+1)$ respectivement. Le lemme bien-connu de Dolbeault-Grothendieck affirme que toute forme d'' -fermée de type (p, q) avec $q > 0$ est localement d'' -exacte (c'est l'analogue pour d'' du lemme usuel de Poincaré pour d , voir par exemple [Hör66]). En d'autres termes, le complexe de faisceaux $(\mathcal{A}^{p,\bullet}, d'')$ est exact en degré $q > 0$; en degré $q = 0$, $\text{Ker } d''$ est le faisceau Ω_X^p des germes de formes holomorphes de degré p sur X .

Plus généralement, si E est un fibré vectoriel holomorphe de rang r sur X , il existe un opérateur d'' naturel agissant sur l'espace $C^\infty(X, \Lambda^{p,q}T_X^* \otimes E)$ des (p, q) -formes C^∞ à valeurs dans E . En effet, si $s = \sum_{1 \leq \lambda \leq r} s_\lambda e_\lambda$ est une (p, q) -forme exprimée en termes d'un repère holomorphe local de E , on peut définir $d''s := \sum d''s_\lambda \otimes e_\lambda$, en observant que les matrices de transition mises en jeu dans des changements de repères holomorphes sont holomorphes, ce qui n'affecte pas le calcul de d'' . Il est alors clair que le lemme de Dolbeault-Grothendieck est encore valable pour des formes à valeurs dans E . Pour tout entier $p = 0, 1, \dots, n$, les *groupes de cohomologie de Dolbeault* $H^{p,q}(X, E)$ sont définis comme étant les groupes de cohomologie du complexe des formes globales de type (p, q) (gradués par q) :

$$(1.1) \quad H^{p,q}(X, E) = H^q(C^\infty(X, \Lambda^{p,\bullet}T_X^* \otimes E)).$$

Maintenant, rappelons le résultat fondamental suivant de théorie des faisceaux (théorème d'isomorphisme de De Rham-Weil) : soit (\mathcal{L}^\bullet, d) une résolution d'un faisceau \mathcal{F} par des faisceaux acycliques, i.e. un complexe de faisceaux $(\mathcal{L}^\bullet, \delta)$ donnant une suite exacte de faisceaux

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{j} \mathcal{L}^0 \xrightarrow{\delta^0} \mathcal{L}^1 \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{L}^q \xrightarrow{\delta^q} \mathcal{L}^{q+1} \longrightarrow \dots ,$$

avec $H^s(X, \mathcal{L}^q) = 0$ pour tout $q \geq 0$ et $s \geq 1$ (pour avoir cette dernière condition d'acyclicité, il suffit par exemple que les \mathcal{L}^q soient flasques ou mous, par exemple des faisceaux de modules sur le faisceau d'anneau \mathcal{C}^∞). Alors il y a un isomorphisme fonctoriel

$$(1.2) \quad H^q(\Gamma(X, \mathcal{L}^\bullet)) \longrightarrow H^q(X, \mathcal{F}).$$

Nous appliquons ceci dans la situation suivante : soit $\mathcal{A}^{p,q}(E)$ le faisceau de germes de sections C^∞ de $\Lambda^{p,q}T_X^* \otimes E$. Alors $(\mathcal{A}^{p,\bullet}(E), d'')$ est une résolution du \mathcal{O}_X -module localement libre $\Omega_X^p \otimes \mathcal{O}(E)$ (lemme de Dolbeault-Grothendieck), et les faisceaux $\mathcal{A}^{p,q}(E)$ sont acycliques comme \mathcal{C}^∞ -modules. Grâce à (1.2) nous obtenons

1.3. Théorème d'isomorphisme de Dolbeault (1953). *Pour tout fibré vectoriel holomorphe E sur X , il existe un isomorphisme canonique*

$$H^{p,q}(X, E) \simeq H^q(X, \Omega_X^p \otimes \mathcal{O}(E)). \quad \square$$

Si X est algébrique projective et si E est un fibré vectoriel algébrique, le théorème GAGA de Serre [Ser56] montre que les groupes de cohomologie algébrique $H^q(X, \Omega_X^p \otimes \mathcal{O}(E))$ calculés avec les sections algébriques des faisceaux concernés sur des ouverts de Zariski sont isomorphes aux groupes de cohomologie analytiques correspondants. Comme nous utiliserons ici un point de vue exclusivement analytique, nous n'aurons en fait pas besoin de ce théorème de comparaison.

1.B. Connexions sur les variétés différentiables

Soit E un fibré vectoriel réel ou complexe de rang r sur une variété différentiable M de classe C^∞ . Une *connexion* D sur E est un opérateur différentiel linéaire d'ordre 1

$$D : C^\infty(M, \Lambda^q T_M^* \otimes E) \rightarrow C^\infty(M, \Lambda^{q+1} T_M^* \otimes E)$$

tel que D satisfasse la règle de Leibnitz

$$(1.4) \quad D(f \wedge u) = df \wedge u + (-1)^{\deg f} f \wedge Du$$

pour toutes formes $f \in C^\infty(M, \Lambda^p T_M^*)$, $u \in C^\infty(X, \Lambda^q T_M^* \otimes E)$. Sur un ouvert $\Omega \subset M$ où E admet une trivialisatation $\tau : E|_\Omega \xrightarrow{\cong} \Omega \times \mathbb{C}^r$, une connexion D peut s'écrire

$$Du \simeq_\tau du + \Gamma \wedge u$$