AUTOUR DE LA CONJECTURE DE ZILBER-PINK

P. Habegger, G. Rémond, T. Scanlon,
E. Ullmo, A. Yafaev

Panoramas et Synthèses

Numéro 52

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 55 € ($ 82)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Panoramas et Synthèses
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
panosmf@ihp.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 1272-3835

ISBN 978-2-85629-856-5

Directeur de la publication : Stéphane Seuret

PANORAMAS ET SYNTHÈSES 52

AUTOUR DE LA CONJECTURE DE ZILBER-PINK

P. Habegger, G. Rémond, T. Scanlon, E. Ullmo, A. Yafaev

Société mathématique de France
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

Philipp Habegger
Department of Mathematics and Computer Science, Spiegelgasse 1, 4051 Basel, Switzerland
E-mail : philipp.habegger@unibas.ch

Gaël Rémond
Institut Fourier, UMR 5582, CS 40700, 38058 Grenoble Cedex 9, France
E-mail : Gael.Remond@univ-grenoble-alpes.fr

Thomas Scanlon
Department of Mathematics, University of California, Berkeley, Evans Hall, Berkeley, CA 94720-3840, USA
E-mail : scanlon@math.berkeley.edu

Emmanuel Ullmo
Institut des Hautes Études Scientifiques, 35, route de Chartres, 91440 Bures sur Yvette, France
E-mail : ullmo@ihes.fr

Andrei Yafaev
University College London Department of Mathematics Gower street WC1E 6BT London United Kingdom
E-mail : yafaev@math.ucl.ac.uk

***Classification mathématique par sujets.* (2010) —** 03C64, 11G10, 11G15, 11G50, 11J81, 14G35, 14K15, 14G40, 14J20, 14T05, 22E40.

***Mots-clés et phrases.* —** Bornes explicites, conjecture d'André-Oort, conjecture de Manin-Mumford, conjecture de Zilber-Pink, géométrie diophantienne, géométrie tropicale, hauteurs, intersections exceptionnelles, multiplication complexe, o-minimalité, problème de Lehmer, sous-groupe algébrique, sous-variétés de tores algébriques, théorème de Pila-Wilkie, théorie ergodique, tores, variétés abéliennes, variétés de Shimura.

***Keywords and phrases.* —** Bi-algebraicity, Zilber-Pink conjecture, functional transcendence, o-minimality, Pila-Wilkie theorem, Shimura varieties, abelian varieties, complex multiplication, algebraic tori, André-Oort conjecture, Manin-Mumford conjecture, Diophantine geometry, heights, unlikely intersections, ergodic theory, tropical geometry.

AUTOUR DE LA CONJECTURE DE ZILBER-PINK

P. Habegger, G. Rémond, T. Scanlon, E. Ullmo & A. Yafaev

Résumé. **—** Suite aux travaux de Faltings et Vojta démontrant les conjectures de Mordell et Lang sur les variétés abéliennes et à ceux de Raynaud démontrant la conjecture de Manin-Mumford, de nombreuses nouvelles questions diophantiennes sont apparues, souvent décrites comme des questions d'intersections exceptionnelles. L'arithmétique des espaces de modules de variétés abéliennes et plus généralement des variétés de Shimura a parallèlement fait l'objet de nombreux travaux, dont un axe est constitué par la conjecture d'André-Oort.

Ces deux thèmes peuvent être placés dans un même cadre – la conjecture de Zilber-Pink. Ce volume propose une introduction à ces problèmes et aux techniques variées qui sont employées : géométrie, théorie des hauteurs, groupes réductifs et théorie de Hodge, variétés de Shimura, théorie des modèles à travers la notion de structures o-minimales. Il contient les textes correspondant aux cours donnés au CIRM, en mai 2011, par Philipp Habegger, Gaël Rémond, Thomas Scanlon, Emmanuel Ullmo et Andrei Yafaev et une ample introduction rédigée par E. Ullmo, axée sur la notion de bi-algébricité, visant à présenter le cadre général.

Abstract. **— Around the Zilber-Pink conjecture.** Following Faltings and Vojta's work proving the Mordell-Lang conjecture for abelian varieties and Raynaud's work proving the Manin-Mumford conjecture, many new Diophantine questions appeared, often described as problems of unlikely intersections. The arithmetic of moduli spaces of abelian varieties and more generally Shimura varieties has been parallely developed, around the central André-Oort conjecture.

These two themes can be placed in a common frame - the Zilber-Pink conjecture. This volume proposes an introduction to these problems and to the various techniques used : geometry, height theory, reductive groups and Hodge theory, Shimura varieties, model theory via the notion of o-minimal structure. It contains texts corresponding to courses presented at CIRM, in May 2011, by Philipp Habegger, Gaël Rémond, Thomas Scanlon, Emmanuel Ullmo and Andrei Yafaev and an ample introduction by E. Ullmo, centered on the notion of bi-algebraicity, aiming at a presentation of the general setting.

TABLE DES MATIÈRES

RÉSUMÉS DES ARTICLES

Les conjectures de Manin-Mumford, André-Oort ainsi que celle de Zilber-Pink portent sur des variétés algébriques (tores algébriques, variétés abéliennes ou semi-abéliennes, variétés de Shimura pures ou mixtes) qui possèdent un sous ensemble naturel de points spéciaux et de sous-variétés spéciales. Le texte propose une axiomatisation, dans l'esprit de la théorie des modèles, des variétés algébriques possédant un ensemble de points spéciaux et de sous-variétés spéciales vérifiant des propriétés naturels en insistant sur les aspects bi-algébriques de la question. Dans un deuxième temps l'article fait le point sur les résultats récents sur cet ensemble de conjectures.

Le texte est la version écrite des exposés donnés par l'auteur au CIRM en mai 2011 sur la preuve de la conjecture d'André-Oort sous l'hypothèse de Riemann généralisée due à Klingler, Ullmo et Yafaev. Il contient également une introduction à la théorie des variétés de Shimura.

Dans ce texte nous présentons les idées centrales des preuves des conjectures de Manin-Mumford et d'André-Oort (admettant l'Hypothèse de Riemann Généralisée) basées sur la combinaison des techniques galoisiennes, géométriques et ergodiques.

En utilisant une technique de preuve, suggérée par Zannier et utilisée avec succès par Pila et Zannier, pour prouver la conjecture de Manin-Mumford sur les relations algébriques sur les points de torsion d'une variété abélienne, Pila a présenté une preuve inconditionnelle de la conjecture de André-Oort, lorsque la variété de Shimura ambiante est un produit de courbes modulaires. Ces résultats ont ensuite été étendus à d'autres variétés de Shimura et variétés de Shimura mixtes. Nous exposons ici ces méthodes, en accordant une attention particulière aux détails du théorème de comptage de Pila et Wilkie.

Soit X une sous-variété fermée, irréductible, définie sur $\overline{\mathbf{Q}}$, dans le tore algébrique $\mathbf{G}_m^n$. Nous donnons un survol des majorations de la hauteur d'un point de X, qui est contenu dans un sous-groupe algébrique de dimension $n - \dim X$. Les premiers résultats dans cette direction ont été obtenus par Bombieri-Zannier, dans le cas où X est une hypersurface, et par Bombieri-Masser-Zannier quand X est une courbe. Les majorations de ce type sont utiles pour résoudre quelques cas de la conjecture de Zilber-Pink. L'auteur a démontré une borne pour la hauteur, quand X est de dimension quelconque, en 2009. Nous explicitons ici une majoration effective.

Nous proposons une présentation unifiée des différents énoncés de minorations de hauteur qui trouvent leur source dans le problème de Lehmer. Elle englobe les versions sur les tores multiplicatifs, les variétés abéliennes, les variantes dites relatives ainsi que le problème de Bogomolov effectif. Cette approche suggère une conjecture dont la formulation est nouvelle même dans le cadre classique des nombres algébriques. Nous examinons ensuite comment ces minorations de hauteur s'appliquent à la conjecture de Zilber-Pink : quitte à retirer un ensembe exceptionnel convenable, l'intersection considérée vérifie une propriété de Northcott et il suffit donc de borner la hauteur pour montrer la finitude.

ABSTRACTS

The text is the written part of the lectures by the author at the CIRM in May 2011 on the proof of the André-Oort conjecture assuming the generalized Riemann hypothesis due to Klingler, Ullmo and Yafaev. It also contains an introduction to the theory of Shimura varieties.

In this paper we give an overview of the proofs of the Manin-Mumford and the André-Oort (assuming the Generalised Riemann Hypothesis) conjectures based on a combination of Galois-theoretic, Geometric and Ergodic techniques.

Employing a proof technique suggested by Zannier and first successfully implemented by Pila and Zannier to give a reproof of the Manin-Mumford conjecture on algebraic relations on torsion points of an abelian variety, Pila presented an unconditional proof of the André-Oort conjecture when the ambient Shimura variety is a product of modular curves. In subsequent works, these results have been extended to some higher dimensional Shimura and mixed Shimura varieties. With these notes we expose these methods paying special attention to the details of the Pila-Wilkie counting theorem.

Let X be an irreducible closed subvariety defined over $\overline{\mathbf{Q}}$ of the algebraic torus $\mathbf{G}_m^n$. We give an overview on what is known on upper bounds for the height when intersecting X with an algebraic subgroup of $\mathbf{G}_m^n$ that has dimension $n - \dim X$. Early general results in this directy were obtained by Bombieri-Zannier if X is a hypersurface and Bombieri-Masser-Zannier if X is a curve. Such height bounds are useful in the context of the Zilber-Pink Conjecture. The author proved a height bound for X of arbitrary dimension in 2009. In this paper we give an effective and explicit height upper bound.

After a classical introduction to heights, we discuss various generalisations of Lehmer's problem. The framework is that of normalized heights on abelian varieties and tori. We include the study of obstruction indices, relative at the same time to an arbitrary ground field and to an algebraic subgroup. We introduce the notion of a Lehmer group to unify our statements. Usual examples correspond to the trivial group (classical Lehmer's problem), the torsion group (relative Lehmer's problem) or the whole group of algebraic points (effective Bogomolov's problem) but we show that also all finite rank subgroups are of interest, even in the one-dimensional case. We then discuss the applications of such height lower bounds to the Zilber-Pink conjecture. We show how all the variants quoted can be used to provide a crucial step toward the conjecture: once one knows (by other methods) that the height of the intersection under consideration is bounded, the Lehmer-like bounds allow to get finiteness.

AVANT-PROPOS

Au cours des dernières années une activité intense s'est développée autour des propriétés arithmétiques et géométriques des sous-variétés spéciales des tores algébriques, des variétés (semi)-abéliennes et des variétés de Shimura. Dans ce cadre les conjectures de Manin-Mumford et d'André-Oort caractérisent les sous-variétés spéciales par la densité des points spéciaux.

Boris Zilber et Richard Pink, avec des motivations assez éloignées, ont dégagé l'énoncé d'une conjecture « d'intersections atypiques » pour les variétés de Shimura mixtes ou les variétés semi-abéliennes qui généralise les conjectures de Manin-Mumford et d'André-Oort. Les premiers résultats dans la direction de ces énoncés au delà des questions de type Manin-Mumford ou André-Oort sont dus à Bombieri, Masser et Zannier. Les textes qui composent cet ouvrage se proposent de faire le point sur les progrès récents concernant ces questions et de tracer quelques perspectives d'avenir.

Quatre cours ont été présentés aux États de la Recherche au CIRM en mai 2011 sur ces thématiques. Le premier, donné par Emmanuel Ullmo et Andrei Yafaev, portait sur la preuve de la conjecture d'André-Oort sous l'hypothèse de Riemann généralisée (GRH), preuve due à Klingler, Ullmo et Yafaev. Le cours de Thomas Scanlon exposait l'approche o-minimale initiée par Pila et Zannier pour des preuves inconditionnelles de Manin-Mumford et de certains cas de la conjecture d'André-Oort. Les cours de Philipp Habegger et de Gaël Rémond portaient sur le problème de Zilber-Pink pour les variétés abéliennes et les tores.

Les textes qui composent ce volume suivent en grande partie les présentations orales. Cependant un texte d'introduction générale au volume, *Structures spéciales et problème de Zilber-Pink* écrit par Emmanuel Ullmo ne correspond à aucun exposé. Il fait le lien entre les différents thèmes de l'ouvrage en cherchant à dégager le cadre naturel « bi-algébrique » pour les problèmes de type Manin-Mumford, André-Oort et Zilber-Pink. Un point rapide sur certains progrès importants du sujet, obtenus principalement via la méthode o-minimale, depuis la session des États de la Recherche en 2011, est aussi présenté dans ce texte.

Le texte d'Emmanuel Ullmo : *Autour de la conjecture d'André-Oort* introduit les outils nécéssaires à la compréhension de la preuve de la conjecture d'André-Oort sous GRH par la méthode d'Edixhoven-Hindry. On y trouve une présentation de la théorie des variétés de Shimura qui insiste sur les aspects qui interviennent dans la conjecture d'André-Oort et une introduction à la théorie ergodique sur les espaces homogènes dans la lignée des travaux de Ratner, Margulis et Mozes-Shah. La première partie du texte expose la preuve due à Edixhoven de la conjecture d'André-Oort sous GRH pour un produit de courbes modulaires.

Le texte compagnon d'Andrei Yafaev : *Special points and intersections in abelian varieties and Shimura varieties* décrit les grandes lignes de la preuve, sous GRH, de la conjecture d'André-Oort pour une variété de Shimura générale. La preuve mélange des techniques galoisiennes, géométriques et ergodiques.

Le texte de Thomas Scanlon : *o-minimality as an approach to the André-Oort conjecture* développe le point de vue o-minimal introduit par Pila et Zannier pour donner une nouvelle preuve de la conjecture de Manin-Mumford. Ce point de vue aboutit à des preuves inconditionnelles de certains cas de la conjecture d'André-Oort et propose une perspective prometteuse pour l'étude de problèmes de type Zilber-Pink. Une introduction détaillée à la théorie o-minimale qui met l'accent sur le théorème de comptage de Pila-Wilkie est présentée ainsi que la preuve par Pila de la conjecture d'André-Oort pour un produit de courbes modulaires par ces méthodes. Le texte se termine par un point sur la preuve récente de la conjecture d'André-Oort pour l'espace de modules des variétés abéliennes principalement polarisées suivant la stratégie de Pila et Zannier.

La contribution de Philipp Habegger : *Effective height upper bounds on algebraic tori* commence par un panorama des résultats sur la conjecture de Zilber-Pink sur les tores depuis les travaux fondateurs de Bombieri, Masser et Zannier puis se concentre sur l'obtention de bornes supérieures pour la hauteur dans ce cadre. Une version explicite et nouvelle du théorème de la hauteur bornée pour les tores est énoncée et prouvée. Deux appendices décrivent les bornes pour les hauteurs qui sont connues dans le cas des variétés abéliennes et des variétés de Shimura.

Après une introduction générale à la notion de hauteur, le texte de Gaël Rémond : *Généralisations du problème de Lehmer et applications à la conjecture de Zilber-Pink* passe en revue les résultats de minoration de hauteur dans la lignée des problèmes de Lehmer et de Bogomolov effectif et explique leurs applications à la conjecture de Zilber-Pink pour les variétés abéliennes et les tores.

Nous espérons que ce panorama sur des questions centrales en géométrie arithmétique aidera le lecteur à se familiariser avec les outils variés de géométrie algébrique, de théorie des nombres, de théorie de Galois, de théorie ergodique ou de théorie des modèles et o-minimalité qui se combinent harmonieusement dans les démonstrations des énoncés autour de Zilber-Pink et que sa lecture contribuera à susciter de l'intérêt et de nouvelles recherches dans ce sujet en plein développement.

FOREWORD

In recent years we have witnessed the development of an intense activity around arithmetic and geometric properties of special subvarieties of algebraic tori, (semi)-abelian varieties and Shimura varieties. In this context the Manin-Mumford conjecture and the André-Oort conjecture characterize special subvarieties by the density of their special points.

Starting with quite distinct motivations, Boris Zilber and Richard Pink have come up with a conjecture on "unlikely intersections" for mixed Shimura varieties or semi-abelian varieties which encompasses both the Manin-Mumford and André-Oort conjectures. The first results in the direction of these problems, beyond the questions of Manin-Mumford or André-Oort type, are due to Bombieri, Masser and Zannier. The papers of this volume expose the state of the art on the recent progresses towards these questions and give an overview of future prospects.

Four courses were presented during the conference "États de la Recherche" at CIRM, Marseille, France, in May 2011 on these topics. The subject of the first course, by Emmanuel Ullmo and Andrei Yafaev, was the proof of the André-Oort conjecture, conditional to the generalized Riemann hypothesis (GRH), a proof due to Klingler, Ullmo and Yafaev. Thomas Scanlon's course described the o-minimal approach initiated by Pila and Zannier, giving a new proof of the Manin-Mumford conjecture and giving unconditional proofs of several cases of the André-Oort conjecture. The courses given by Philipp Habegger and Gaël Rémond studied the Zilber-Pink problem for abelian varieties and algebraic tori.

The texts in this volume follow for a large part the oral presentations. However a general introductory text, *Structures spéciales et problème de Zilber-Pink* [*Special structures and the Zilber-Pink problem*] written by Emmanuel Ullmo does not correspond to any course. It provides a link between the different themes of the present volume emphasizing the natural "bi-algebraic" setting for the Manin-Mumford, André-Oort and Zilber-Pink problems. A summary of the important advances on the subject, obtained since the 2011 *États de la Recherche* conference, mainly via the o-minimal method, is also presented in this text.

Emmanuel Ullmo's text : *Autour de la conjecture d'André-Oort* [*Around the André-Oort conjecture*] introduces the tools required to understand the proof of the André-Oort conjecture, conditional on GRH, by the method of Edixhoven-Hindry. The text