INÉGALITÉS ISOPÉRIMÉTRIQUES DE FABER-KRAHN ET CONSÉQUENCES

Gilles CARRON

Ecole Normale Supérieure de Lyon
46, allée d'Italie
F-69364 Lyon (France)

Abstract. We show that a complete non-compact Riemannian manifold satisfies a Faber-Krahn inequality if and only if it satisfies a Sobolev inequality. We also give some other equivalent proprieties such as bound on heat kernel or bound on Green function. We also show that we have uniform lower bound for the volume of geodesic balls in terms of the Faber-Krahn inequality.

Résumé. Nous montrons qu'une variété riemannienne complète non compacte vérifie une inégalité de Faber-Krahn si et seulement si elle vérifie une inégalité de Sobolev. Nous montrons aussi d'autres équivalences (en fonction du noyau de la chaleur ou de Green). Enfin, nous montrerons que l'inégalité de Faber-Krahn permet notamment de minorer uniformément le volume des boules géodésiques.

M.S.C. Subject Classification Index : 58G11, 58G25, 58C40, 47A30, 31C15, 46E35.

TABLE DES MATIÈRES

0. INTRODUCTION

Soit (M,g) une variété riemannienne non compacte de volume infini, complète, connexe, de dimension n. S'il existe une constante $C > 0$ et un $p \geq n$, tels que l'on ait l'inégalité isopérimétrique

$$\mathrm{vol}(\partial\Omega) \geq C(\mathrm{vol}\,\Omega)^{1-\frac{1}{p}}, \text{ pour tout ouvert borné de } M \ , \tag{0.1}$$

la connaissance de la meilleure constante C telle que cette inégalité soit valable (que nous noterons Is_p) donne de nombreuses informations sur les propriétés analytiques de la variété : par exemple on peut en déduire des inégalités de Sobolev, ([F-F], [M], [Ch]), un contrôle du noyau minimal de l'opérateur de la chaleur $e^{-t\Delta}$ (où Δ est le Laplacien associé à la métrique g) ([D], [C-K-S]), une majoration de la fonction de Green positive minimale, ([G1], [G2], [C-F]), une minoration du volume des boules géodésiques, ou un contrôle du spectre des domaines compacts de M pour le problème de Dirichlet ([C-L]). Dans ce dernier cas, l'inégalité isopérimétrique (0.1) implique une version généralisée d'une inégalité prouvée par Faber et Krahn dans le cas euclidien ([F], [K1], [K2]) : nous avons l'existence d'une constante $B > 0$ telle que la première valeur propre du laplacien pour le problème de Dirichlet dans un ouvert borné Ω de M vérifie

$$\lambda_1^D(\Omega) \geq B(\mathrm{vol}\,\Omega)^{-2/p} \ . \tag{0.2}$$

Notons Λ_p la plus grande des constantes B pour laquelle cette inégalité est valable. Dans le cas euclidien, Faber et Krahn démontrent une inégalité du type (0.2) en partant de l'inégalité isopérimétrique (0.1), pour $p = n$ (l'égalité ayant lieu si et seulement si Ω est une boule euclidienne). En fait la minoration est du type $\Lambda_p \geq J(p)Is_p^2$, où $J(p)$ est une fonction de p. Cependant, un contrôle en sens inverse (i.e. retrouver (0.1) à partir de (0.2)) n'est en général pas possible, (voir la proposition 3.4). L'objet de cet article est principalement de retrouver à partir d'une inégalité isopérimétrique de Faber-Krahn du type (0.2) des résultats qui nécessitaient auparavant l'inégalité isopérimétrique (0.1). Etablir une telle inégalité sur des variétés non compactes est en effet un problème difficile et généralement non résolu.

D'après [F-F] et [M], l'inégalité $Is_p > 0$, où $Is_p = \inf\{\mathrm{vol}(\partial\Omega)/(\mathrm{vol}\,\Omega)^{1-\frac{1}{p}} :$ Ω ouvert borné de $M\}$, est équivalente à l'existence d'une constante $S > 0$ telle que l'on ait l'inégalité de Sobolev

$$\|u\|_{L^{\frac{p}{p-1}}} \leq S\ \|du\|_{L^1},\ \forall u \in \mathrm{C}_0^\infty(M)\ ; \tag{0.3}$$

de plus la meilleure constante validant l'inégalité ci-dessus vaut Is_p^{-1}. Dans le même esprit, nous montrerons que l'inégalité de Faber-Krahn $\Lambda_p > 0$, où $\Lambda_p = \inf\{\lambda_1^D(\Omega)$ $(\mathrm{vol}\,\Omega)^{\frac{2}{p}}$, Ω ouvert borné de $M\}$, est équivalente à l'existence d'une constante μ_p telle que l'on ait l'inégalité de Sobolev

$$\mu_p\ \|u\|^2_{L^{\frac{2p}{p-2}}} \leq \|du\|^2_{L^2},\ \forall u \in \mathrm{C}_0^\infty(M)\ ; \tag{0.4}$$

de plus, la meilleure constante $\mu_p(M)$ intervenant dans cette inégalité est contrôlée par Λ_p et réciproquement. Mais, d'après N. Varopoulos ([Va]), l'inégalité (0.4) équivaut à l'existence d'une majoration du noyau minimal de l'opérateur de la chaleur $P(t,x,y)$ du type

$$P(t,x,x) \leq D_p t^{-p/2}\ ,\ \text{pour tout } t > 0\ \text{ et tout } x \in M\ ; \tag{0.5}$$

avec un contrôle mutuel entre les constantes D_p et μ_p.

D'après A.A. Grigor'yan ([G1], [G2]) l'inégalité isopérimétrique $Is_p > 0$ (pour $p > 2$) implique l'existence de fonctions de Green positives, i.e. de solutions positives de l'équation $\Delta u = \delta_x$, pour tout $x \in M$; de plus il existe une constante $C_p < \infty$ telle que, si on note G_x la fonction de Green minimale de pôle x, elle vérifie

$$\mathrm{vol}\{y \in M, G_x(y) > t\} \leq C_p t^{-p/(p-2)},\ t > 0\ . \tag{0.6}$$

Il est facile de démontrer que ces propriétés impliquent que $\Lambda_p > 0$, et que l'hypothèse $\Lambda_p > 0$ ou l'inégalité de Sobolev (0.4) suffit pour obtenir ce résultat. En résumé, le théorème principal est le suivant

0.7. Théorème principal. — *Si (M, g) est une variété riemannienne de volume infini, complète, connexe, de dimension n, alors pour tout p supérieur ou égal à n et différent de 2 les quatre propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) nous avons l'inégalité isopérimétrique $\Lambda_p > 0$;

(ii) nous avons l'inégalité de Sobolev $\mu_p(M) > 0$,
où $\mu_p(M) = \inf_{u \in C_0^\infty(M)} \|du\|_{L^2}^2 / \|u\|_{L^{2p/(p-2)}}^2$;

(iii) (M, g) a des fonctions de Green positives et il existe $C_p > 0$ tel que $\mathrm{vol}\{G_{x_0} > t\} \leq C_p / t^{\frac{p}{p-2}}$, pour tout $t > 0$ et tout $x \in M$;

(iv) il existe une constante D_p telle que le noyau minimal de l'opérateur de la chaleur $P(t, x, y)$ vérifie $P(t, x, x) \leq D_p t^{-p/2}$, pour tout $t > 0$ et tout $x \in M$.

De plus les constantes $\Lambda_p,\ \mu_p,\ C_p,\ D_p$ sont mutuellement contrôlées.

Remarque. — A. Grigor'yan a récemment montré l'équivalence entre les propriétés i) et iv) ; ceci de façon directe, il établit en fait cette équivalence pour des inégalités plus générales, voir ([G3]). La première partie sera consacrée à la preuve de ce théorème puis, dans une deuxième partie, nous montrerons quelques propriétés vérifiées par les variétés riemanniennes satisfaisant l'inégalité de Faber-Krahn $\Lambda_p > 0$: à l'aide de Λ_p nous obtiendrons d'abord, pour $r > p/2$, une constante $C = C(r, p, \Lambda_p) > 0$ telle que l'on ait l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg suivante

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C \, \|u\|_{L^r}^{1-\frac{p}{2r}} \, \|\Delta u\|_{L^r}^{\frac{p}{2r}}, \ \forall u \in \mathrm{C}_0^\infty(M) \ ; \tag{0.8}$$

ceci implique notamment que l'espace obtenu en complétant $\mathrm{C}_0^\infty(M)$ muni de la norme $\|u\|_{L^r} + \|\Delta u\|_{L^r}$ est constitué de fonctions continues bornées. Toujours à l'aide de Λ_p, nous obtiendrons une minoration du volume des boules géodésiques, ainsi qu'une minoration de chaque valeur propre du laplacien pour le problème de Dirichlet dans un domaine compact de M.

Enfin, dans une troisième partie, nous nous intéresserons au lien entre l'inégalité de Faber-Krahn (0.2) et l'inégalité isopérimétrique (0.1) : à l'aide des travaux de P. Buser ([Bu]) et de M. Kanaï ([Ka]) nous montrerons que, si la courbure de Ricci de M est uniformément minorée, alors l'hypothèse $\Lambda_p > 0$ implique l'inégalité isopérimétrique $Is_{p/2} > 0$ et même $Is_p > 0$ si la courbure de Ricci de M est positive ou nulle. Ceci améliore le résultat de T. Couhlon ([Co1]) qui obtenait la même conclusion