

LE SPECTRE DU LAPLACIEN :
SURVOL PARTIEL DEPUIS
LE BERGER-GAUDUCHON-MAZET ET PROBLÈMES

Yves COLIN DE VERDIÈRE *

Institut Universitaire de France
Institut Fourier
Laboratoire de Mathématiques
F-38402 Saint Martin d'Hères Cedex (France)

Abstract. I present some results obtained since the 70's on the direct and inverse problem for the spectrum of the Laplacian on a compact Riemannian manifold, spectrum and closed geodesics, spectrum and graphs, planar electrical nets.

Résumé. Je présente quelques résultats obtenus depuis les années 70 sur le problème direct et inverse pour le spectre du laplacien d'une variété riemannienne compacte : spectre et géodésiques fermées, spectre et graphe, réseaux électriques planaires.

M.S.C. Subject Classification Index (1991) : 58G15, 05C99.

*GADGET

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION	235
1. PROBLÈMES INVERSES	236
2. PROBLÈMES DIRECTS	239
BIBLIOGRAPHIE	250

INTRODUCTION

Le but de cet exposé est de donner un bref aperçu de ce qui à mes yeux constitue quelques développements marquants concernant l'étude des problèmes *directs* et *inverses* de la théorie spectrale du laplacien d'une variété riemannienne compacte depuis la parution en 1971 du Berger-Gauduchon-Mazet (alias [B-G-M]), le spectre d'une variété riemannienne compacte.

Ce livre a eu l'immense mérite d'attirer l'attention des géomètres riemanniens sur l'intérêt du spectre du laplacien comme invariant géométrique au même titre que la courbure, les géodésiques fermées, etc... De plus, il rassemblait pour le lecteur l'essentiel des connaissances du moment, qu'elles soient parues ou qu'elles fassent partie du folklore du sujet: exemples explicitement calculés, traitement détaillé de la méthode de l'équation de la chaleur, inégalité de Cheeger, etc...

L'impact de ce livre a été considérable et n'est sûrement pas étranger à la popularité qu'a acquis le spectre en 20 ans (voir [BE-B] pour une bibliographie jusqu'à 1982).

Pour la clarté, il m'a paru raisonnable de séparer cet exposé de façon un peu artificielle en 2 parties.

I. Problèmes inverses : quelles informations sur la variété riemannienne peut être lue dans le spectre ?

Le problème de l'isospectralité relève de ce thème, je n'y ferai pas allusion, me contentant de renvoyer à l'exposé de Hubert Pesce à cette table ronde.

Je me restreindrai ici à 2 sujets : *spectre du laplacien et longueurs des géodésiques fermées et déterminant et compacité.*

II. Problèmes directs.

Il s'agit de savoir quelles suites de nombres réels peuvent être le spectre d'un laplacien riemannien ou d'un opérateur de Schrödinger sur une variété compacte X donnée, la difficulté principale étant liée aux questions de multiplicités.

On évoquera en particulier la différence créée par la présence de champs magnétiques. On donnera un aperçu de travaux récents sur les réseaux électriques et les perspectives pour la compréhension de l'intégrale de Dirichlet.

Ce texte est dédié à Marcel Berger, mon directeur de thèse. Je saisis l'occasion pour lui exprimer mon admiration et ma reconnaissance.

La présente version de ce texte est postérieure de 2 années à la table ronde et j'ai donc tenu compte de quelques résultats postérieurs.

1. PROBLÈMES INVERSES

IA. Spectre du laplacien et longueurs des géodésiques fermées.

Notons $\lambda_1 = 0 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$ le spectre d'une variété riemannienne compacte connexe (X, g) (voir [BGM]) et par $\mathcal{L}(X, g)$ l'ensemble des longueurs des géodésiques fermées (0 inclus, fermées=périodiques mais pas nécessairement primitives) de (X, g) .

On a le théorème.

Théorème — Soit $S(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-it\sqrt{\lambda_k}}$, alors le support singulier de la distribution tempérée $S(t)$ est inclus dans $\pm\mathcal{L}(X, g)$ et on a égalité dans le cas suivant (grâce au calcul exact de la partie principale de la singularité) dit non dégénéré : la métrique g sur X sera dite non dégénérée si la fonction énergie sur l'espace des lacets de (X, g) n'admet que des variétés critiques non dégénérées au sens de Bott (c'est en particulier le cas si la différentielle de l'application de Poincaré n'admet pas 1 comme valeur propre) et les valeurs critiques prises sur les géodésiques fermées sont distinctes sauf éventuellement pour des géodésiques identiques à orientation près (c'est le cas si la courbure est < 0 et aussi dans la situation générique).

En particulier, dans les cas précédents le spectre du laplacien détermine les longueurs des géodésiques périodiques.

Commentaires : ce théorème a été démontré pour la première fois dans ma thèse en 1973 ([CV1]) en utilisant une méthode dérivée de celle de l'équation de la chaleur et en fait proche de l'intégrale de Feynman, la formulation en termes de support singulier a été obtenue peu après, suite à mes travaux, par J. Chazarain et H. Duistermaat-V. Guillemin ([D-G]); ils utilisent le calcul des opérateurs intégraux de Fourier de Hörmander et le calcul précis de la partie principale des singularités à l'aide de la différentielle de l'application de Poincaré des géodésiques périodiques leur est dû.

Ce théorème résulte de l'écriture de formules de traces pour certaines fonctions du laplacien : l'exponentielle complexe $e^{-z\Delta}$ (Schrödinger) dans mon cas, l'exponentielle $e^{-it\sqrt{\Delta}}$ (équation des ondes) pour les autres auteurs. Ces formules sont des généralisations approchées des formules de Poisson (cas des tores plats) et de Selberg (cas des surfaces à courbure -1).

De telles formules avaient été obtenues peu auparavant de façon non rigoureuse par les physiciens Gutzwiller ([GU]) et Balian-Bloch ([B-B]). Les travaux de ces derniers ont été directement à l'origine de ma thèse. J'en ai eu connaissance grâce à Marcel Berger.

Il est clair que l'intégrale de Feynman est au cœur du sujet, fournissant une heuristique donnant simplement la formule de traces ([CV2], [CV8]), y compris le terme lié à l'application de Poincaré, le déterminant du Hessien de l'énergie étant calculable en ces termes ([KA]).

On pourra, pour les développements récents du côté de la physique, se référer à l'école d'été des Houches organisée par Gianonni et Voros sur le chaos quantique ([G-V]).

Applications : le théorème précédent a des applications importantes pour le problème inverse. Il a conduit à des théorèmes de rigidité spectrale en courbure négative (absence de déformations isospectrales non triviales : travaux de V. Guillemin-D. Kazdan [G-K], améliorés par M. Min-Oo [MO]).

Le problème de savoir si le flot géodésique détermine la métrique a fait l'objet récemment d'une attention importante (voir exposé de C. Croke à cette table ronde).