

NILVARIÉTÉS ISOSPECTRALES

Hubert PESCE

Institut Fourier
Laboratoire des Mathématiques
F-38402 Saint Martin d'Hères Cedex (France)

Abstract. In the first part of this paper, one recalls the history of the isospectral problem and the importance of interactions between spectral geometry and number theory. In the second part, one looks at the case of nilmanifolds and gives more precise results.

Résumé. Dans la première partie de cet article, on rappelle l'historique des problèmes d'isospectralité et l'importance des interactions entre la géométrie spectrale et la théorie des nombres. Dans la deuxième partie, on regarde le cas des nilvariétés et on obtient des résultats plus précis.

M.S.C. Subject Classification Index (1991) : 58G40, 58G25, 22E25.

Cette recherche a été faite en partie dans le cadre du contrat C.E.E. "GADGET" SC1-0105-C au laboratoire associé au C.N.R.S., n° 188.

TABLE DES MATIÈRES

1. UN HISTORIQUE DES PROBLÈMES D'ISOSPECTRALITÉ	515
2. LA GÉOMÉTRIE SPECTRALE DES NILVARIÉTÉS	520
BIBLIOGRAPHIE	528

1. UN HISTORIQUE DES PROBLÈMES D'ISOSPECTRALITÉ

On peut peut-être dire que le problème de l'isospectralité tire sa popularité d'un article écrit par M. Kac en 1966 intitulé "Peut-on entendre la forme d'un tambour?" qui posait un problème qui allait mettre 25 ans pour être résolu [Ka]. Précisons la question : supposons que l'on attache une membrane sur la frontière d'un domaine plan D et que l'on la frappe, on sait alors décrire sa vibration : si $u(x, t)$ désigne l'altitude de la membrane au dessus du point x ($x \in D$) à l'instant t , alors u vérifie l'équation des ondes : $\partial_t^2 u + \Delta_x u = 0$. Si l'on cherche les fréquences fondamentales de la vibration, c'est-à-dire si l'on cherche les solutions sous la forme suivante : $u(x, t) = e^{i\omega t} \varphi(x)$, alors on obtient : $\Delta \varphi = \omega^2 \varphi$. Autrement dit, ω est une fréquence fondamentale si et seulement si $\lambda = \omega^2$ est une valeur propre du problème aux limites

$$\begin{cases} \Delta \varphi = \lambda \varphi \\ \varphi(x) = 0, \quad \text{si } x \in \partial D. \end{cases}$$

(La condition au bord imposée ici s'appelle la condition de Dirichlet ; si on impose la nullité de la dérivée normale on obtient alors la condition de Neumann.) D'après la théorie elliptique, l'ensemble de ces valeurs propres est discret et s'accumule à l'infini, on l'appelle le spectre du domaine et on le notera $Sp(D) = \{0 < \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \dots\}$. Il est immédiat, d'après la définition, que deux domaines isométriques sont isospectraux (*i.e.* ont même spectre). Le problème posé par M. Kac est donc de savoir si la réciproque est vraie. Plus précisément : *deux domaines isospectraux sont-ils isométriques ?* La réponse à cette question a été fournie en 1991 par C. Gordon, D. Webb et S. Wolpert. Nous reviendrons là-dessus plus tard.

On peut évidemment se poser la même question dans le cadre des variétés riemanniennes. En effet, si (M, g) est une variété riemannienne fermée (*i.e.* compacte

sans bord), l'opérateur de Laplace-Beltrami Δ opérant sur $C^\infty(M)$ admet un spectre discret que l'on notera $Sp(M, g) = \{0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \dots\}$ et que l'on appelle le spectre de la variété [B-G-M]. Par analogie avec la question posée par M. Kac pour les domaines plans, on est amené à se poser la question suivante : *deux variétés riemanniennes fermées isospectrales sont-elles isométriques ?* Le but de cette partie est de rappeler l'historique de ce problème, en soulignant notamment les interactions avec la théorie des nombres.

On sait que la réponse à la question que l'on vient de se poser est non, et ce depuis 1964. En effet, J. Milnor a exhibé deux tores plats de dimension 16 isospectraux et non isométriques [Mi]. L'idée de Milnor est la suivante : la connaissance du spectre d'une variété est équivalente à la connaissance de sa fonction de partition (la fonction de partition d'une variété (M, g) est définie pour $t > 0$ par : $Z(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda_n t} = \int_M p(x, x, t) dx$ où p désigne le noyau de la chaleur). Or la fonction de partition d'un tore plat $\Gamma \backslash \mathbf{R}^n$ (muni de la métrique induite par le produit scalaire usuel $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $\mathbf{R}^n$) se calcule facilement. Pour cela on introduit le réseau dual $\Gamma^* = \{x \in \mathbf{R}^n \text{ tels que } \langle x, \gamma \rangle \in \mathbf{Z} \text{ pour tout } \gamma \in \Gamma\}$; le spectre du tore plat $\Gamma \backslash \mathbf{R}^n$ est l'ensemble des $4\pi^2 \|\gamma^*\|^2$ où γ^* parcourt Γ^* [B-G-M]. Autrement dit, la fonction de partition Z_Γ du tore plat $\Gamma \backslash \mathbf{R}^n$ s'exprime facilement à partir de la fonction thêta Θ_{Γ^*} associée au réseau dual : $Z_\Gamma(t) = \Theta_{\Gamma^*}(e^{-4\pi^2 t})$. Donc deux tores plats sont isospectraux si et seulement si les fonctions thêta associées à leur réseau dual sont égales. Or, dans les années quarante, Witt avait démontré, en utilisant la théorie des formes modulaires, que les réseaux classiquement notés D_{16}^+ et $D_8^+ \oplus D_8^+$ ont même fonction thêta et sont non isométriques [W]. On en déduit que les tores plats $D_{16}^+ \backslash \mathbf{R}^{16}$ et $D_8^+ \oplus D_8^+ \backslash \mathbf{R}^{16}$ sont isospectraux et non isométriques, c'est le célèbre exemple de Milnor. Quelques années plus tard, Kneser construisit par la même méthode un exemple en dimension 12 [Kn]. Enfin, tout récemment, Conway et Sloane ont construit des exemples de tores plats isospectraux et non isométriques de dimension 4, et ce sans utiliser les fonctions thêta [C-S]. Comme, d'autre part, on sait que deux tores plats de dimension 2 isospectraux sont isométriques [B-G-M], il ne reste plus que le cas de la dimension 3 en suspens (à noter cependant qu'il n'existe qu'un nombre fini de classes d'isométrie de tores plats isospectraux à un tore donné, et ce en toute dimension).

En 1979, M.F. Vignéras construisit de nouveaux exemples de variétés isospectrales et non isométriques particulièrement intéressants [V]. En effet, elle donna des exemples de variétés hyperboliques isospectrales et non isométriques, et ce en dimension deux et trois. Ceci a deux conséquences importantes. Tout d'abord, même en dimension deux, la réponse au problème que l'on se pose est non. D'autre part, en dimension trois, les variétés qu'elle construit ne sont même pas homéomorphes, par le théorème de rigidité de Mostow. On ne peut donc même pas espérer lire la topologie d'une variété dans son spectre (Ikeda a même construit des espaces lenticulaires isospectraux et n'ayant pas le même type d'homotopie [I]). Il est important de noter que les exemples de Vignéras, construits avec des groupes de quaternions, viennent aussi de la théorie des nombres, ce qui a caractérisé à peu près tous les exemples fournis avant 1985.

A partir de cette date, la situation changea radicalement puisque Sunada donna une méthode pour construire des variétés isospectrales et non isométriques, et ce de manière beaucoup plus systématique. Il est cependant intéressant de remarquer que son approche n'est pas sans liens avec la théorie des nombres. Elle est basée sur la similitude qu'il y a entre la théorie de Galois des extensions de corps et celle des revêtements galoisiens, sa méthode apparaît comme un analogue géométrique de méthodes classiques en théorie des nombres. En effet, on peut associer à un corps de nombres k sa fonction zêta de Dedekind ζ_k et un problème classique de théorie des nombres est de savoir si cette fonction détermine le corps de nombres (à isomorphisme près). Il existe une réponse partielle à ce problème (voir [C-F], p. 363) :

Proposition. — *Soient K une extension galoisienne de $\mathbf{Q}$ de degré fini dont le groupe de Galois est G , k_1 et k_2 des sous-corps de K correspondant aux sous-groupes H_1 et H_2 de G . Alors k_1 et k_2 ont même fonction zêta si et seulement si toute classe de conjugaison de G rencontre H_1 et H_2 en un même nombre d'éléments.*

En utilisant la proposition précédente, on peut construire des corps de nombres non isomorphes ayant même fonction zêta. L'idée de Sunada est de donner un analogue de ce résultat dans un contexte géométrique. Or, à toute variété riemannienne (M, g) , on peut associer de manière naturelle une fonction zêta en posant, pour