Bulletin
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

UNE DESCRIPTION FONCTORIELLE DES K-THÉORIES DE MORAVA DES 2-GROUPES ABÉLIENS ÉLÉMENTAIRES

Nguyen Le Chi Quyet

Tome 148
Fascicule 1

2020

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

pages 133-172

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un périodique trimestriel de la Société Mathématique de France.

Fascicule 1, tome 148, mars 2020

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
`commandes@smf.emath.fr`

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
`www.ams.org`

Tarifs

Vente au numéro : 43 € ($ 64)
Abonnement électronique : 135 € ($ 202),
avec supplément papier : Europe 179 €, hors Europe 197 € ($ 296)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Bulletin de la SMF

Bulletin de la Société Mathématique de France
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 1 44 27 67 99 • Fax : (33) 1 40 46 90 96
`bulletin@smf.emath.fr` • `smf.emath.fr`

ISSN 0037-9484 (print) 2102-622X (electronic)

Directeur de la publication : Stéphane SEURET

Bull. Soc. Math. France
148 (1), 2020, p. 133-172

UNE DESCRIPTION FONCTORIELLE DES K-THÉORIES DE MORAVA DES 2-GROUPES ABÉLIENS ÉLÉMENTAIRES

PAR NGUYEN LE CHI QUYET

RÉSUMÉ. — Le but de cet article est l'étude, d'un point de vue fonctoriel, des K-théories de Morava modulo 2 des 2-groupes abéliens élémentaires. Autrement dit, nous étudions les foncteurs $V \mapsto K(n)^*(BV)$ pour le nombre premier $p = 2$ et n un entier positif. Ils sont gradués sur $\mathbb{Z}/(2^{n+1} - 2)$, les termes impairs de la graduation sont triviaux.

Le cas $n = 1$ résulte directement du travail d'Atiyah sur la K-théorie topologique, il donne un foncteur coanalytique qui ne possède aucun sous-foncteur polynomial non-constant. Il est très différent du cas $n > 1$, où les foncteurs s'avèrent être analytiques. Le cas de $K(2)^*$ est très particulier: le foncteur est auto-dual.

ABSTRACT (*A functorial description of the Morava K-theories of elementary abelian 2-groups*). — The aim of this article is to study, from a functorial viewpoint, the mod 2 Morava K-theories of elementary abelian 2-groups. Namely, we study the functors $V \mapsto K(n)^*(BV)$ for the prime $p = 2$ and n a positive integer. They are graded over $\mathbb{Z}/(2^{n+1} - 2)$, the odd terms of this graduation are trivial.

The case $n = 1$, which follows directly from the work of Atiyah on topological K-theory, gives us a coanalytic functor which contains no non-constant polynomial sub-functor. This is very different from the case $n > 1$, where the above-mentioned functors are analytic. The case of $K(2)^*$ is very special: the functor is auto-dual.

Texte reçu le 7 mai 2018, modifié le 16 mai 2019, accepté le 10 juillet 2019.

NGUYEN LE CHI QUYET, Université d'Éducation de Ho Chi Minh Ville, 280 Rue An Duong Vuong, District 5, Ho Chi Minh Ville, Viet Nam • *E-mail :* `quyetnlc@hcmue.edu.vn`

Classification mathématique par sujets (2010). — 55N20, 55N22, 55U99.

Mots clefs. — K-théorie de Morava, Loi de groupe formel, Représentation générique.

L'auteur est partiellement soutenu par le projet CS.2018.19.03.TĐ de l'Université d'Éducation de Ho Chi Minh Ville lors de la rédaction de cet article.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037-9484/2020/133/$ 5.00

doi:10.24033/bsmf.2801

1. Introduction

1.1. Motivation. — Les K-théories de Morava modulo un premier p fixé forment une famille de théories cohomologiques munies d'une orientation complexe : $\{K(n)^*(-) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Elles jouent un rôle important en théorie d'homotopie stable moderne. La théorie $K(n)^*(-)$ est périodique de période $2(p^n - 1)$. L'anneau de coefficients $K(n)^* = \mathbb{F}_p[\nu_n, \nu_n^{-1}]$ ($|\nu_n| = 2 - 2p^n$) est un corps gradué : tous les modules sur $K(n)^*$ sont libres. Il en résulte que toutes les K-théories de Morava modulo p satisfont à la formule de Künneth. La loi de groupe formel F_n associée à $K(n)^*(-)$ est la loi de Honda de hauteur n dont la p-série est donnée par $[p]_{F_n}(x) = \nu_n x^{p^n}$.

Dans cet article, on étudie, d'un point de vue fonctoriel, des K-théories de Morava modulo 2 des 2-groupes abéliens élémentaires $K(n)^*(BV)$. Considérons le cas d'un espace vectoriel de dimension 1, *i.e.* $V = \mathbb{Z}/2$. La suite exacte de Gysin associée à la fibration $S^1 \to B\mathbb{Z}/2 \to \mathbb{C}P^\infty$ induit la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow K(n)^{*-2}(\mathbb{C}P^\infty) \xrightarrow{[2]_{F_n}(x)} K(n)^*(\mathbb{C}P^\infty) \longrightarrow K(n)^*(B\mathbb{Z}/2) \longrightarrow 0,$$

qui nous donne l'isomorphisme de $K(n)^*$-modules :

$$K(n)^*(B\mathbb{Z}/2) \cong K(n)^*[x]/(x^{2^n}),$$

où $x \in K(n)^2(\mathbb{C}P^\infty)$ est l'orientation complexe de $K(n)^*(-)$. Donc, la structure de $K(n)^*$-module sur $K(n)^*(BV^\sharp)$ est complètement comprise grâce à la formule de Künneth.

Soit $\mathrm{End}(V)$ l'anneau des endomorphismes du $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel V. Tout morphisme $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ induit un morphisme en cohomologie

$$\varphi^*\colon K(n)^*(BV) \longrightarrow K(n)^*(BV).$$

Cela fournit une action canonique de l'anneau $\mathrm{End}(V)$ sur $K(n)^*(BV)$. Cette action est déterminée par la loi de groupe formel F_n. Considérons l'exemple de Brunetti [3] sur l'algèbre $K(n)^*(B\mathbb{Z}/2 \times B\mathbb{Z}/2) \cong K(n)^*[x,y]/(x^{2^n}, y^{2^n})$. Considérons l'endomorphisme φ de $V = \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ caractérisé par la matrice $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$. Alors, l'action de φ^* sur les générateurs x, y est donnée par la multiplication (sur F_n) des matrices :

$$\begin{bmatrix} \varphi^*(x) \\ \varphi^*(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{F_n} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Cela veut dire que

$$\varphi^*(x) = [1]_{F_n}(x) +_{F_n} [0]_{F_n}(y) = x, \text{ et}$$
$$\varphi^*(y) = [1]_{F_n}(x) +_{F_n} [1]_{F_n}(y) = x +_{F_n} y$$

(pour les notations concernant les lois de groupe formel, on renvoie à la section 2.2). On étudie ici le foncteur covariant $V \mapsto K(n)^*(BV^\sharp)$, où $\sharp$ désigne le dual linéaire. On note que, par la périodicité, il suffit de considérer le foncteur $\mathbb{Z}/(2^{n+1}-2)$-gradué $V \mapsto K(n)^{\overline{*}}(BV^{\sharp})$.

Le cas de la première K-théorie de Morava ($\mathbb{Z}/2$-graduée) $V \mapsto K(1)^{\overline{*}}(BV^{\sharp})$ résulte directement du travail de M. Atiyah sur la K-théorie topologique (cf. [2]). En passant au produit tensoriel $\mathbb{F}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} -$, le résultat d'Atiyah donne une équivalence de foncteurs

$$\mathbb{F}_2[V] \xrightarrow{\simeq} K(1)^{\overline{*}}(BV^{\sharp}),$$

où V est concentré en degré $\overline{2}$. Donc, $V \mapsto K(1)^{\overline{*}}(BV^{\sharp})$ est *coanalytique* et ne possède aucun sous-foncteur polynomial non-constant. Il est très différent du cas $n > 1$ où les foncteurs $V \mapsto K(n)^{\overline{*}}(BV^{\sharp})$ s'avèrent être analytiques.

1.2. Plan de l'artice. — La section 2 est consacrée au rappel des définitions et des résultats importants qui seront utilisés dans l'article : la catégorie des foncteurs $\mathscr{F}$, des lois de groupe formel et des théories cohomologiques.

Dans la section 3, on décrit le foncteur $V \mapsto K(n)^{\overline{*}}(BV^{\sharp})$. Soit $J(V)$ l'idéal d'augmentation de l'algèbre de groupe $\mathbb{F}_2[V]$. Notons que $J(V)$ est un $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel, de dimension $|V|-1$, engendré par les éléments $(u) = [u]-[0]$ pour $u \in V$ (en observant que $(0) = 0$). Soit $\mathcal{K}_n^{\overline{*}}(V)$ le foncteur $\mathbb{Z}/(2^{n+1}-2)$-gradué défini par le quotient de l'algèbre symétrique $\mathrm{S}^*(J(V))$ par les relations

$$(u+v) = (u) + (v) + (u)^{2^{n-1}}(v)^{2^{n-1}}$$

où $J(V)$ est concentré en degré $\overline{2}$.

THÉORÈME 1.1. — *On a un isomorphisme de $\mathbb{F}_2$-algèbres $\mathbb{Z}/(2^{n+1}-2)$-graduées, naturel en V :*

$$\begin{aligned} \vartheta_V \colon \mathcal{K}_n^{\overline{*}}(V) &\longrightarrow K(n)^{\overline{*}}(BV^{\sharp}) \\ (u) &\longmapsto \mathfrak{e}(u \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}), \end{aligned}$$

où $\mathfrak{e}(u \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ est la classe d'Euler du complexifié du fibré en droite réelle de base $BV^{\sharp}$ associé à u.

Pour démontrer ce théorème, on utilise une approximation de la loi de groupe formel $\bar{F}_n$ associée à la théorie $K(n)^{\overline{*}}(-)$:

$$\bar{F}_n(x,y) \equiv x + y + x^{2^{n-1}}y^{2^{n-1}} (\text{mod deg } (2^{n+1}-1)).$$

Cette approximation induit une relation entre les classes d'Euler

$$\mathfrak{e}(u \otimes_{\mathbb{R}} v \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) = \mathfrak{e}(u \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) + \mathfrak{e}(v \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) + (\mathfrak{e}(u \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}))^{2^{n-1}}(\mathfrak{e}(v \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}))^{2^{n-1}}$$

qui nous permet de démontrer le théorème 1.1. On se sert de ce théorème pour déduire des propriétés du foncteur $\mathcal{K}_n^{\overline{*}}$: il est exponentiel de Hopf pour tout $n \in \mathbb{N}$ tandis qu'il est analytique si et seulement si $n \geq 2$.

La section 4 est consacrée à l'étude des sous-foncteurs et des foncteurs quotients du foncteur $\mathcal{K}_2^{\overline{*}}$ en particulier. Grâce à la relation $(u+v)^2 = (u)^2 + (v)^2$

dans $\mathcal{K}_2^{\overline{*}}(V)$, on obtient une inclusion d'algèbres (naturelle en V), de l'algèbre extérieure $\Lambda^*(V)$ dans $\mathcal{K}_2^{\overline{*}}(V)$, en envoyant $u \in V$ sur $(u)^2 \in \mathcal{K}_2^{\overline{*}}(V)$. Pour $p, q \in \mathbb{N}$, on définit par $K_{p,q}$ l'image du morphisme naturel de $(\mathrm{S}^p \circ J) \otimes \Lambda^q$ dans $\mathcal{K}_2^{\overline{2p+4q}}$. Les foncteurs $K_{p,q}$ déterminent une bi-filtration du foncteur $\mathcal{K}_2^{\overline{*}}$ dont le gradué est donné par :

Théorème 1.2. — $\dfrac{K_{p,q}}{K_{p-2,q+1} + K_{p-1,q+2}} \cong \Lambda^p \otimes \Lambda^q.$

On utilise cette bi-filtration pour démontrer le théorème suivant :

Théorème 1.3. — *Le cosocle de $\mathcal{K}_2^{\overline{2k}}$ est la somme directe $\bigoplus_{i \equiv k \pmod 3} \Lambda^i$ tandis que le socle est la somme directe $\bigoplus_{i \equiv -k \pmod 3} \Lambda^i$. On en déduit que le foncteur $\mathcal{K}_2^{\overline{2k}}$ est indécomposable si $k \not\equiv 0 \pmod 3$, il est somme directe d'un foncteur constant et d'un foncteur indécomposable si $k \equiv 0 \pmod 3$.*

Considérons le foncteur sous-jacent du foncteur $\mathbb{Z}/6$-gradué $\mathcal{K}_2^{\overline{*}}$:

$$\mathcal{K}_2 = \mathcal{K}_2^{\overline{0}} \oplus \mathcal{K}_2^{\overline{2}} \oplus \mathcal{K}_2^{\overline{4}}.$$

L'objectif de la section 5 est de démontrer le résultat suivant :

Théorème 1.4. — *Le foncteur $\mathcal{K}_2$ est auto-dual. De plus,*

1. $(\mathcal{K}_2^{\overline{2}})^\natural \cong \mathcal{K}_2^{\overline{4}}$ *et* $(\mathcal{K}_2^{\overline{4}})^\natural \cong \mathcal{K}_2^{\overline{2}}$,
2. $(\mathcal{K}_2^{\overline{0}})^\natural \cong \mathcal{K}_2^{\overline{0}}$.

On démontre ce théorème en construisant une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée

$$\langle -, - \rangle_V \colon \mathcal{K}_2(V) \times \mathcal{K}_2(V^\sharp) \to \mathbb{F}_2.$$

Cette forme est déterminée par des évaluations initiales et sa compatibilité à la structure de foncteur exponentiel de Hopf de $\mathcal{K}_2^{\overline{*}}$. L'isomorphisme naturel $\gamma \colon \mathcal{K}_2 \to \mathcal{K}_2^\natural$ défini par $\gamma_V(x)(\alpha) := \langle x, \alpha \rangle_V$ fait de $\mathcal{K}_2$ un foncteur auto-dual. Ici, $\natural$ est le dual au sens de Kuhn [10].

1.3. Perspectives. — Premièrement, le foncteur $\mathcal{K}_1$ est isomorphe au foncteur $V \mapsto \mathbb{F}_2[V]$; l'idéal d'augmentation de son dual est unisériel : ses facteurs de composition sont les Λ^n (cf. [11, Theorem 7.8]), de plus le groupe d'extension $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{F}}(\Lambda^i, \Lambda^j)$ est isomorphe à $\mathbb{F}_2$ si $|i - j| = 1$, et trivial sinon. On peut se demander si un phénomène analogue a lieu pour $\mathcal{K}_2$ qui a, comme un sous-quotient, l'extension non triviale de S_4^k par S_4^{k+3} (pour tout $k \geq 1$). Pour répondre à cette question, il faut calculer le groupe $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{F}}(\mathrm{S}_4^*, \mathrm{S}_4^*)$ en relation avec la structure d'algèbre de Hopf tri-graduée de $\mathrm{Ext}^*_{\mathscr{F}}(\mathrm{S}_4^*, \mathrm{S}_4^*)$ (cf. [5]).

Deuxièmement, en utilisant la technique de Powell sur la K-théorie complexe connexe (voir [17]), on espère de déduire la détection pour les K-théories de

Morava connexes $k(n)^*(-)$ pour un nombre premier p quelconque. Autrement dit, on conjecture que

$$k(n)^*(BV^\sharp) \hookrightarrow K(n)^*(BV^\sharp) \oplus H^*(BV^\sharp),$$

où $H^*(-)$ est la cohomologie singulière modulo p. Il faut ensuite étudier les liens avec la version entière dont l'anneau de coefficients et $\mathbb{Z}_p[\nu_n, \nu_n^{-1}]$ avec $\mathbb{Z}_p$ est l'anneau des entiers p-adiques. On l'étudie en utilisant des renseignements apportés par la théorie des caractères généralisés due à Hopkins, Kuhn and Ravenel (cf. [9]).

Remerciements. — Ce travail fait partie de ma thèse de doctorat effectuée à l'Université d'Angers [18]. Je tiens à remercier sincèrement M. Geoffrey Powell et M. Lionel Schwartz, qui, en tant que Directeurs de thèse, se sont toujours montrés à l'écoute et très disponibles tout au long de ma thèse, ainsi pour l'aide et le temps qu'ils ont bien voulu me consacrer.

2. Préliminaire

2.1. Rappels sur la catégorie $\mathscr{F}$. — Dans cette section, on rappelle la définition de la catégorie $\mathscr{F}$ pour un nombre premier p, et quelques opérations dans $\mathscr{F}$. On définit aussi des objets importants de cette catégorie. Soit $\mathbb{F}_p$ le corps à p éléments.

Notation 2.1. — On désigne par **Vect** la catégorie des $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels, par $\mathscr{V}$ la sous-catégorie pleine de **Vect** dont les objets sont de dimension finie.

Définition 2.2. — La catégorie $\mathscr{F}$ est la **catégorie des foncteurs** covariants de $\mathscr{V}$ vers **Vect** dont les morphismes sont les transformations naturelles.

Proposition 2.3 (Cf. [15, Chapter V, §3]). — *La catégorie $\mathscr{F}$ est abélienne avec limites inductives exactes et avec limites projectives.*

Remarque 2.4. — La structure de catégorie abélienne sur $\mathscr{F}$ provient de celle de **Vect** : une suite de foncteurs $0 \to F \to G \to H \to 0$ est exacte si et seulement si la suite d'espaces vectoriels $0 \to F(V) \to G(V) \to H(V) \to 0$ est exacte pour tout $V \in \mathscr{V}$.

Exemple 2.5. — On donne ici quelques exemples classiques d'objets de $\mathscr{F}$.

1. On note $\mathbb{F}_p$ le foncteur constant qui associe à tout $V \in \mathscr{V}$ l'espace vectoriel $\mathbb{F}_p$, et à tout morphisme dans $\mathscr{V}$ l'identité de $\mathbb{F}_p$.
2. On note Id le foncteur inclusion de $\mathscr{V}$ dans **Vect**, qui envoie les objets et morphismes de $\mathscr{V}$ sur eux-mêmes.