ISSN 0012-9593

quatrième série - tome 53 fascicule 1 janvier-février 2020

ANNALES SCIENTIFIQUES de L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Laurent FARGUES

Simple connexité des fibres d'une application d'Abel-Jacobi et corps de classes local

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure

Publiées avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

Rédaction / *Editor*

Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure,
45, rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 05, France.
Tél. : (33) 1 44 32 20 88. Fax : (33) 1 44 32 20 80.
annales@ens.fr

Édition et abonnements / *Publication and subscriptions*

Société Mathématique de France
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 09
Tél. : (33) 04 91 26 74 64
Fax : (33) 04 91 41 17 51
email : abonnements@smf.emath.fr

Tarifs

Abonnement électronique : 420 euros.
Abonnement avec supplément papier :
Europe : 551 €. Hors Europe : 620 € ($ 930). Vente au numéro : 77 €.

ISSN 0012-9593 (print) 1873-2151 (electronic)

Directeur de la publication : Stéphane Seuret
Périodicité : 6 nos / an

Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.
4^{e} série, t. 53, 2020, p. 89 à 124

SIMPLE CONNEXITÉ DES FIBRES D'UNE APPLICATION D'ABEL-JACOBI ET CORPS DE CLASSES LOCAL

PAR LAURENT FARGUES

RÉSUMÉ. – On donne une démonstration du type Langlands géométrique de la conjecture de géométrisation de la correspondance de Langlands locale de l'auteur pour GL_1. Pour cela on étudie en détail un certain morphisme d'Abel-Jacobi dont on montre que c'est une fibration pro-étale localement triviale en diamants simplement connexes en grand degré . Ces diamants sont des espaces de Banach-Colmez absolus épointés que l'on étudie en détail.

ABSTRACT. – We give a geometric Langlands type proof for GL_1 of the geometrization conjecture of the local Langlands correspondence formulated by the author. In this purpose, we study in detail an Abel-Jacobi morphism. We prove that this morphism is a pro-etale locally trivial fibration in simply connected diamonds in high degree. Those diamonds are absolute punctured Banach-Colmez spaces and we study them in detail.

Introduction

Cet article concerne le cas abélien de la conjecture de type Langlands géométrique pour la correspondance de Langlands locale formulée par l'auteur ([7], [5]). Rappelons que cette conjecture affirme que si E est un corps local, G un groupe réductif sur E et

$$\varphi : W_E \to {}^L G$$

un paramètre de Langlands discret on devrait pouvoir construire un faisceau pervers $\mathscr{F}_\varphi$ sur le champ

$$\mathrm{Bun}_{G,\overline{\mathbb{F}}_q}$$

des G-fibrés sur la courbe que l'on a introduite dans notre travail en commun avec Jean-Marc Fontaine ([6]). Ce faisceau pervers devrait satisfaire de nombreuses propriétés et en particulier construire les L-paquets locaux munis de leur structure interne (i.e. une paramétrisation de chaque élément du L-paquet) associés à φ pour toute forme intérieure étendue pure de G.

L'auteur a bénéficié du support du projet ANR-14-CE25 "PerCoLaTor" et du projet ERC Advanced grant 742608 "GeoLocLang".

 doi:10.24033/asens.2418

Le champ Bun_G lui est un champ perfectoïde pour la topologie pro-étale de Scholze. C'est un objet qui vit dans le monde des diamants introduits par Scholze ([23], [21]).

Lorsque $G = \mathrm{GL}_1$ on peut déduire la conjecture de la théorie du corps de classes local. Néanmoins on cherche une preuve de ce résultat indépendante du type corps de classes géométrique. Si X est une courbe propre et lisse le point principal dans la construction du faisceau automorphe associé à un système local sur X est le fait que pour $d \gg 0$ le morphisme d'Abel-Jacobi

$$\begin{aligned} \mathrm{Div}_X^d &\longrightarrow \mathrm{Pic}_X^d \\ D &\longmapsto \mathcal{O}(D) \end{aligned}$$

est une fibration localement triviale en variétés algébriques simplement connexes (des espaces projectifs).

Dans cet article on démontre un résultat analogue dans le cadre de notre conjecture et on en déduit la conjecture pour GL_1 indépendamment de la théorie du corps de classes local. Cela redémontre en particulier celle-ci sous la forme du théorème de Kronecker-Weber local.

Voici une description plus détaillée des principaux résultats. On note $\mathbb{F}_q$ le corps résiduel de notre corps local E. On définit dans la section 2 l'espace de modules des diviseurs effectifs de degré $d > 0$ sur la courbe

$$\mathrm{Div}^d$$

dont on démontre que c'est un diamant. Plus précisément (prop. 2.17)

$$\mathrm{Div}^1 = \mathrm{Spa}(E)^\diamond/\varphi^{\mathbb{Z}},$$

ce qui traduit le fait que les débasculements d'un $\mathbb{F}_q$-espace perfectoïde S sur E donnent des diviseurs de Cartier de degré 1 sur la courbe X_S. On montre de plus (prop. 2.20) que pour $d > 0$

$$\mathrm{Div}^d = (\mathrm{Div}^1)^d/\mathfrak{S}_d$$

comme quotient pro-étale. Il s'agit d'une nouvelle application de notre résultat de factorisation des éléments primitifs obtenu avec Fontaine qui est la clef de voûte de [6]. Le diamant Div^d admet une description alternative comme espace projectif sur un espace de Banach-Colmez absolu $\mathbf{B}^{\varphi=\pi^d}$,

$$\mathrm{Div}^d = \mathbf{B}^{\varphi=\pi^d} \setminus \{0\}/\underline{E}^\times$$

via lequel le morphisme d'Abel-Jacobi en degré d est donné par

$$\mathrm{AJ}^d : \mathbf{B}^{\varphi=\pi^d} \setminus \{0\}/\underline{E}^\times \longrightarrow [\bullet/\underline{E}^\times].$$

Ces espaces $\mathbf{B}^{\varphi=\pi^d}$ ne sont pas des espaces de Banach-Colmez usuels, ce ne sont pas des diamants mais des « diamants absolus » i.e. $\mathbf{B}^{\varphi=\pi^d} \to \mathrm{Spa}(\overline{\mathbb{F}}_q)$ est relativement représentable en diamants mais $\mathbf{B}^{\varphi=\pi^d}$ n'en n'est pas un (cf. sec. 7.1). Il est remarquable qu'une fois épointés ces diamants absolus deviennent des diamants (prop. 2.21). On constate donc que AJ^d est une fibration pro-étale localement triviale de fibre $\mathbf{B}^{\varphi=\pi^d} \setminus \{0\}$. Le résultat principal de ce texte, qui est nettement plus fort que ce dont nous avons besoin afin de développer le programme de Langlands géométrique pour GL_1, est alors le suivant (théo. 5.4).

THÉORÈME 0.1. – *Pour* $d > 1$, *resp.* $d > 2$ *si* $E|\mathbb{Q}_p$, *le diamant* $\mathbf{B}_{\overline{\mathbb{F}}_q}^{\varphi=\pi^d}\setminus\{0\}$ *est simplement connexe au sens où tout revêtement étale fini connexe est trivial.*

La preuve de ce résultat est donnée dans les sections 6 et 7. Le cas d'égales caractéristiques est particulièrement plus simple puisqu'alors le diamant $\mathbf{B}^{\varphi=\pi^d}\setminus\{0\}$ est un espace perfectoïde. Cependant l'analyse de sa preuve est particulièrement éclairante puisque celle-ci repose en définitive sur le théorème de pureté de Zariski-Nagata. La preuve que nous donnons dans le cas d'inégales caractéristiques consiste essentiellement à démontrer un tel résultat de pureté pour l'inclusion

$$\mathbf{B}^{\varphi=\pi^d}\setminus\{0\}\hookrightarrow\mathbf{B}^{\varphi=\pi^d}$$

et à dévisser ce résultat en un résultat de pureté en géométrie rigide « usuelle » (théo. 7.12).

Une fois ce résultat établi le corps de classes géométrique se décrit de la façon suivante. On constate (sec. 3) que

$$\text{« } \pi_1(\mathrm{Div}^1_{\overline{\mathbb{F}}_q}) = W_E \text{ »}$$

du moins du point de vue dual des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-systèmes locaux (les guillemets sont là pour signifier que cela n'a pas vraiment de sens puisqu'on ne dispose pas *a priori* d'un bonne théorie du π_1 dans ce contexte) i.e. les L-paramètres ℓ-adiques correspondent aux systèmes locaux sur $\mathrm{Div}^1_{\overline{\mathbb{F}}_q}$. Partant d'un tel paramètre abélien $\varphi : W_E \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$, si $\mathscr{E}_\varphi^{(1)}$ désigne le $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-système local sur $\mathrm{Div}^1_{\overline{\mathbb{F}}_q}$ associé, on construit son symétrisé pour $d > 0$

$$\mathscr{E}_\varphi^{(d)} = \left(\Sigma^d_* \mathscr{E}_\varphi^{(1)\boxtimes d}\right)^{\mathfrak{S}_d}$$

dans la section 4 où $\Sigma^d : (\mathrm{Div}^1)^d \to \mathrm{Div}^d$ est le morphisme somme de d-diviseurs de degré 1. Par application du théorème précédent celui-ci descend le long de AJ^d en $\mathscr{F}_\varphi^{(d)}$ sur $\mathscr{P}ic^d$. Il s'agit du faisceau $\mathscr{F}_\varphi|_{\mathscr{P}ic^d}$ de notre conjecture. Il s'étend alors automatiquement en tous les degrés en utilisant les structures monoïdales de Div et $\mathscr{P}ic$. Cela prouve que $\mathscr{F}_\varphi^{(1)}$ descend le long de AJ^1 et donc que φ se factorise via l'application de réciprocité d'Artin (prop. 3.3).

Remerciements. – *J'aimerais remercier Peter Scholze et Arthur-César Le Bras pour des discussions sur le sujet. Je remercie également Werner Lütkebohmert de m'avoir expliqué ses résultats d'extension de faisceaux cohérents en géométrie rigide et Ofer Gabber pour des discussions concernant la section 7.4.*

1. Rappels sur le cas « classique »

Soit X une courbe propre et lisse sur un corps k algébriquement clos. Pour $d \geq 1$ on note

$$\mathrm{Div}^d = X^d/\mathfrak{S}_d$$

le schéma de Hilbert des diviseurs de Cartier effectifs de degré d sur X. On note également

$$\mathscr{P}ic = \coprod_{d\in\mathbb{Z}} \mathscr{P}ic^d$$

le champ de Picard de X et

$$\mathrm{Pic} = \coprod_{d\in\mathbb{Z}} \mathrm{Pic}^d$$