Panoramas & Synthèses
16, 2003, p. 101–106

L'ALGÈBRE DE STEENROD EN TOPOLOGIE

par

Lionel Schwartz

Résumé. — On rappelle dans cette note la construction de l'algèbre de Steenrod en théorie de l'homotopie comme algèbre d'opérations naturelles stables. On donne ses principales propriétés.

***Abstract* (The Steenrod algebra in topology).** — One recalls in this note the construction of the Steenrod algebra in homotopy theory as algebra of natural stable transformations. One gives its natural properties.

On présente ici l'algèbre de Steenrod du point de vue de la théorie de l'homotopie. On rappelle les motivations essentielles qui, du point de vue topologique, ont mené à son introduction. Ses propriétés algébriques, et ses catégories de modules et d'algèbres sont étudiées en détails dans l'article qui précède.

1. L'algèbre de Steenrod comme algèbre des opérations cohomologiques stables

1.1. La cohomologie singulière. — Soit p un nombre premier. La cohomologie singulière modulo p est un foncteur contravariant de la catégorie des paires (X, A) $A \subset X$ d'espaces topologiques dans la catégorie $\mathbf{Vect}^{\mathrm{gr}}$ des $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels $\mathbb{N}$-gradués :

$$(X, A) \longmapsto \mathrm{H}^n(X, A; \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})_{n \geqslant 0}.$$

On abrègera dans la suite par $\mathrm{H}^*(X, A)$, et par $\mathrm{H}^* X$ si A est l'ensemble vide. La cohomologie *réduite* $\widetilde{\mathrm{H}}^n X$ est le noyau de l'application canonique : $\mathrm{H}^n X \to \mathrm{H}^n \mathrm{pt}$.

Pourvu qu'on se restreigne à des paires d'espaces raisonnables ce foncteur vérifie les axiomes d'Eilenberg-Steenrod dont la liste suit :

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 55S10.
Mots clefs. — Algèbre de Steenrod, théorie de l'homotopie.

(1) l'invariance par homotopie : deux applications $f_0, f_1 : X \to Y$ sont homotopes si il existe $F : X \times [0,1] \to Y$ telle que $F(x,0) = f_0$ et $F(x,1) = f_1$; on demande alors qu'elles induisent le même morphisme $f_0^* = f_1^*$ en cohomologie ;

(2) l'axiome d'excision, ou ce qui lui est équivalent l'axiome de suspension :

$$\widetilde{\mathrm{H}}^n X \cong \widetilde{\mathrm{H}}^{n+1} \Sigma X.$$

On rappelle que la suspension ΣX d'un espace pointé (X, x_0) est le quotient de $X \times [0,1]$ par la relation qui identifie les points $(x,0)$, $(x,1)$, (x_0,t) en un seul point ; en particulier la suspension d'une sphère pointée de dimension n, ΣS^n, est homéomorphe à une sphère de dimension $n+1$, S^{n+1} ;

(3) la longue suite exacte associée à une paire d'espaces (X, A) :

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{H}^n(X,A) \longrightarrow \mathrm{H}^n X \longrightarrow \mathrm{H}^n A \longrightarrow \mathrm{H}^{n+1}(X,A) \longrightarrow \cdots ;$$

(4) l'axiome de dimension qui donne la valeur prise par le foncteur sur les sphères : $\mathrm{H}^i S^n \cong \mathbb{F}_p$ si $i = 0, n$, et $\mathrm{H}^i S^n \cong \{0\}$ sinon.

S. Eilenberg et N.E. Steenrod ont montré que ces propriétés déterminent de manière unique le foncteur sur des sous-catégories d'espaces topologiques raisonnables tels que les complexes finis.

1.2. Le théorème de représentabilité de Brown et les espaces d'Eilenberg-MacLane. — Fixons un entier n. Le foncteur H^n, de la catégorie des CW-complexes dans celle des groupes abéliens, vérifie les deux premiers axiomes d'Eilenberg-Steenrod. Le second axiome entraîne la propriété de Mayer-Vietoris (pour des paires assez régulières), qui s'énonce comme suit. *Soient $j_0 : A \to A \cup B$ et $j_1 : B \to A \cup B$, $f_0 : A \cap B \to A$ et $f_1 : A \cap B \to B$ les inclusions. Si $u_0 \in \mathrm{H}^n A$ et $u_1 \in \mathrm{H}^n B$ satisfont $f_0^*(u) = f_1^*(u)$, alors il existe $v \in \mathrm{H}^n(A \cup B)$ tel que $j_0^*(v) = u_0$ et $j_1^*(v) = u_1$.*

De plus on a une bijection :

$$\mathrm{H}^n(\bigvee_\lambda X_\lambda) \cong \prod_\lambda \mathrm{H}^n(X_\lambda).$$

Ici $\bigvee_\lambda X_\lambda$ désigne le bouquet des espaces pointés X_λ, le bouquet de deux espaces pointés (X, x_0) et (Y, y_0) est le quotient de $X \cup Y$ par l'identification de x_0 à y_0.

Le théorème de représentabilité de Brown (voir [**2**, § VII.7]) implique alors qu'il existe un espace K_n tel que le foncteur $\mathrm{H}^n(-)$ et le foncteur $[-, K_n]$ des classes d'homotopie d'applications vers K_n soient naturellement équivalents. L'équivalence est décrite comme suit : le groupe $\mathrm{H}^n K_n$ est isomorphe à $\mathbb{F}_p$, on en choisit un générateur ι_n. La transformation naturelle associe à la classe d'homotopie d'une l'application f l'élément $f^*(\iota_n)$.

Par construction, et du fait de la valeur de la cohomologie des sphères, l'espace K_n a tous ses groupes d'homotopie triviaux, sauf le n-ième qui est isomorphe à $\mathbb{F}_p$: c'est ce qu'on appelle un espace d'Eilenberg-MacLane $K(\mathbb{F}_p, n)$.

1.3. Les opérations cohomologiques, les relations d'Adem. — Si on se donne une application

$$\theta_n : \ K_n \longrightarrow K_{n+r}$$

on en déduit par composition une application naturelle

$$\theta_n^* : \ [X, K_n] \cong \mathrm{H}^n X \longrightarrow [X, K_{n+r}] \cong \mathrm{H}^{n+r} X.,$$

qui ne dépend que la classe d'homotopie de θ_n. Inversement une transformation naturelle est entièrement déterminée par une telle application. En effet, si on s'est donné une telle transformation naturelle, l'application associée est l'image de l'identité de $K(\mathbb{F}_p, n)$.

On appelle opération naturelle stable de degré r de la cohomologie singulière modulo p la donnée pour tout entier n d'une transformation naturelle de foncteurs :

$$t_n : \ \mathrm{H}^n(-) \longrightarrow \mathrm{H}^{n+r}(-),$$

satisfaisant à la condition de stabilité suivante :

$$t_n(\Sigma x) = \Sigma(t_{n+1}(x)),$$

pour tout $x \in \widetilde{\mathrm{H}}^n X$. Dans la formule ci-dessus, conformément à l'usage, si $x \in \widetilde{\mathrm{H}}^n X$ on note $\Sigma x \in \widetilde{\mathrm{H}}^{n+1}(\Sigma X)$ la classe correspondante par l'isomorphisme de l'axiome de suspension. L'ensemble de ces opérations forme une $\mathbb{F}_p$-algèbre graduée, le produit étant donné par la composition.

Ainsi qu'on l'a dit, la donnée d'une telle famille est équivalente à celle d'une famille d'applications $\theta_n : K_{n+r} \ \to K_n$ satisfaisant à une propriété *ad hoc*.

L'ensemble de ces opérations avec la somme et la composition comme produit constitue une $\mathbb{F}_p$-algèbre graduée, que l'on notera $\mathcal{A}_p$ et qui s'appelle *l'algèbre de Steenrod*.

Avec cette définition on a évidemment :

Théorème 1.1. — *Pour tout espace X, $\mathrm{H}^* X$ est naturellement un module sur l'algèbre de Steenrod $\mathcal{A}_p$.*

Décrivons cette algèbre. Soit la $\mathbb{F}_p$-algèbre graduée associative unitaire engendrée par des éléments $\widetilde{\mathrm{Sq}}^i$ de degré i (resp. $\widetilde{\mathrm{P}}^i$ de degré $2i(p-1)$, $i > 0$, et $\widetilde{\beta}$ de degré 1 tel que $\widetilde{\beta}^2 = 0$). On considère son quotient par les relations suivantes, dites relations d'Adem :

– pour $p = 2$:

$$\widetilde{\mathrm{Sq}}^a \widetilde{\mathrm{Sq}}^b = \sum_0^{[a/2]} \binom{b-j-1}{a-2j} \widetilde{\mathrm{Sq}}^{a+b-j} \widetilde{\mathrm{Sq}}^j$$

pour tous $a, b > 0$ (la restriction $a < 2b$ n'est pas nécessaire) ;

– pour $p > 2$:

$$\widetilde{\mathrm{P}}^a\widetilde{\mathrm{P}}^b = \sum_0^{[a/p]} (-1)^{a+j} \binom{(p-1)(b-j)-1}{a-pj} \widetilde{\mathrm{P}}^{a+b-j}\widetilde{\mathrm{P}}^j$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{P}}^a\widetilde{\beta}\widetilde{\mathrm{P}}^b = \sum_0^{[a/p]} (-1)^{a+i} \binom{(p-1)(b-i)}{a-pt} \widetilde{\beta}\widetilde{\mathrm{P}}^{a+b-i}\widetilde{\mathrm{P}}^i \\ + \sum_0^{[(a-1)/p]} (-1)^{a+i-1} \binom{(p-1)(b-i)-1}{a-pi-1} \widetilde{\mathrm{P}}^{a+b-i}\widetilde{\beta}\widetilde{\mathrm{P}}^t\end{aligned}$$

pour tous $a, b > 0$ (la condition $a < pb$ n'est pas nécessaire).

N.E. Steenrod a construit des opérations cohomologiques stables Sq^i et P^i qui agissent sur la cohomologie singulière, puis J. Adem a montré que les relations ci-dessus ont lieu dans la cohomologie mod p de n'importe quel espace, et qu'elles engendrent l'idéal des éléments agissant trivialement [**3**]. Le quotient ci-dessus est donc une sous-algèbre de l'algèbre des opérations stables. Le calcul par H. Cartan et J.-P. Serre [**1**] de la cohomologie des espaces d'Eilenberg-Mac Lane montre que ces deux algèbres sont isomorphes.

2. La condition d'instabilité et les algèbres instables

2.1. Modules instables. — La cohomologie modulo p d'un espace X est un $\mathcal{A}_p$-module d'un type particulier : il est instable.

Définition 2.1. — Un $\mathcal{A}_p$-module M est dit instable si il satisfait la condition suivante.

– pour $p = 2$: si $x \in \mathrm{H}^*X$, et $i > |x|$, alors $\mathrm{Sq}^i x = 0$;
– pour $p > 2$: si $x \in \mathrm{H}^*X$, et $e + 2i > |x|$, $e = 0, 1$, alors $\beta^e P^i x = 0$.

Ici $|x|$ désigne le degré de x. En particulier, un $\mathcal{A}_p$-module instable M est trivial en degrés négatifs. On écrit module instable au lieu de $\mathcal{A}_p$-module instable la plupart du temps.

La sous-catégorie pleine de la catégorie des $\mathcal{A}_p$-modules dont les objets sont les modules instables est notée $\mathcal{U}$; elle est abélienne.

2.2. Algèbres instables. — La cohomologie modulo p d'un espace X, munie du cup-produit, est une $\mathbb{F}_p$-algèbre $\mathbb{N}$-graduée, commutative, unitaire, et ce naturellement. Cette structure est reliée à la structure de $\mathcal{A}_p$-module par deux propriétés :

$(\mathcal{K}_1)$ la « formule de Cartan » :
– si $p = 2$

$$\mathrm{Sq}^i(xy) = \sum_{k+\ell=i} \mathrm{Sq}^k x\, \mathrm{Sq}^\ell y;$$

– si $p > 2$:

$$P^i(xy) = \sum_{k+\ell=i} P^k x\, P^\ell y,$$

$$\beta(xy) = (\beta x)\, y + (-1)^{|x|} x\, \beta y$$

pour tous $x, y \in \mathrm{H}^* X$.

($\mathcal{K}_2$)

– si $p = 2$: $\mathrm{Sq}^{|x|} x = x^2$, pour tout $x \in \mathrm{H}^* X$;

– si $p > 2$: $P^{|x|/2} x = x^p$ pour tout x de degré pair dans $\mathrm{H}^* X$.

Ceci conduit à la :

Définition 2.2. — Une $\mathcal{A}_p$-algèbre instable K est un module instable muni d'une structure de $\mathbb{F}_p$-algèbre commutative, unitaire, et dont le produit vérifie les propriétés $\mathcal{K}_1$ et $\mathcal{K}_2$.

On note $\mathcal{K}$ la catégorie des $\mathcal{A}_p$-algèbres instables, dont les morphismes sont les applications d'algèbres, $\mathcal{A}_p$-linéaires, de degré zero. On dit *algèbre instable* au lieu de $\mathcal{A}_p$-algèbre instable.

Exemple 2.3. — La cohomologie modulo 2 du groupe $\mathbb{Z}/2$, $\mathrm{H}^*(\mathbb{Z}/2)$, est une algèbre polynomiale $\mathbb{F}_2[u]$ en un générateur u de degré 1. L'action de $\mathcal{A}_2$ est complètement déterminée par $\mathcal{K}_1$ et $\mathcal{K}_2$. On trouve :

$$\mathrm{Sq}^i u^n = \binom{n}{i} u^{n+i}.$$

Notons que cette cohomologie est aussi la cohomologie de l'espace classifiant $B\mathbb{Z}/2$, et que ce dernier n'est autre que l'espace projectif infini $\mathbb{R}P^\infty$.

Pour $p > 2$, $\mathrm{H}^*(\mathbb{Z}/p)$ est le produit tensoriel $E(t) \otimes \mathbb{F}_p[x]$ d'une algèbre extérieure en un générateur t de degré 1 et d'une algèbre polynomiale en un générateur x de degré 2. L'action de $\mathcal{A}_p$ est determinée par $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ et le fait que β est l'homomorphisme de Bockstein. On obtient :

$$\beta t = x, \quad P^i x^n = \binom{n}{i} x^{n+i(p-1)}.$$

Exemple 2.4. — Pour $p = 2$, le sous-$\mathcal{A}_2$-module de $\mathrm{H}^* B\mathbb{Z}/2$ engendré par u est noté $F(1)$. L'ensemble $\{u, u^2, u^4, \ldots\}$ est une base de $F(1)$ comme $\mathbb{F}_2$-espace vectoriel gradué.

Pour $p > 2$, le sous-$\mathcal{A}_p$-module de $\mathrm{H}^* B\mathbb{Z}/p$ engendré par t est noté $F(1)$. L'ensemble $\{t, x, x^p, x^{p^2}, \ldots\}$ est une de base $F(1)$ comme $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel gradué.

Références

[1] J.-P. Serre – « Cohomologie modulo 2 des complexes d'Eilenberg-Mac-Lane », *Comment. Math. Helv.* **27** (1953), p. 198–232.