Panoramas & Synthèses
16, 2003, p. 55–100

ALGÈBRE DE STEENROD, MODULES INSTABLES ET FONCTEURS POLYNOMIAUX

par

Lionel Schwartz

Résumé. — Ce texte donne une introduction aux propriétés algébriques de l'algèbre de Steenrod et de la catégorie des modules instables. Les relations avec la catégorie des foncteurs polynomiaux sont établies.

***Abstract* (The Steenrod algebra, unstable modules and polynomial functors).** — This text gives an introduction to the algebraic properties of the Steenrod algebra and of the category of unstable modules. The link with the category of polynomial functors is described.

0. Introduction

Ces notes ont leur origine dans la session *État de la Recherche* autour des foncteurs polynomiaux et des modules instables. À la différence des conférences de l'auteur, elles présentent l'algèbre de Steenrod *via* le schéma en groupes des automorphismes du groupe formel additif. Cette présentation ne fait pas appel à la topologie et n'utilise que de l'algèbre élémentaire. L'étude algébrique des modules instables sur l'algèbre de Steenrod qui suit permet de montrer leur similitude avec les foncteurs polynomiaux.

Si ce texte est surtout un exposé actuel de la théorie, il contient aussi quelques nouveautés, en particulier des généralisations au cas $p > 2$ de résultats connus pour $p = 2$ (qui, si elles appartiennent au folklore, ne sont pas écrites dans des sources accessibles) :

– l'extension de l'approche évoquée plus haut *via* le groupe formel additif à $p > 2$;
– un énoncé, pour $p > 2$, correspondant à l'identification du module $F(n)$ aux invariants sous le groupe symétrique dans $F(1)^{\otimes n}$ pour $p = 2$;
– l'introduction des modules instables libres ;
– un nouveau calcul de l'algèbre de Miller J_*^*.

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 55-02, 55S10.
Mots clefs. — Algèbre de Steenrod, modules instables, foncteurs polynomiaux.

Notations. — Les notations suivantes sont utilisées dans la suite comme dans les autres textes de ce volume. La catégorie des k-espaces vectoriels est notée **Vect**, celle des espaces vectoriels de dimension finie $\mathcal{V}_k^f$ ou $\mathcal{V}^f$. Si V est un espace vectoriel sur le corps k, $S^n(V)$ est la n-ième puissance symétrique, $\Lambda^n(V)$ est la n-ième puissance extérieure, $\Gamma^n(V)$ est la n-ième puissance divisée. Le groupe symétrique est noté $\mathfrak{S}_n$. On rappelle que $\Gamma^k(V)$ est isomorphe à $(V^{\otimes k})^{\mathfrak{S}_k}$ (les invariants sous l'action du groupe symétrique) et que, V étant de dimension finie, on a un isomorphisme naturel :

$$S^n(V) \cong \Gamma^n(V^\#)^\#.$$

L'application $\mathbf{V}$, dite Verschiebung, qui envoie $\Gamma^{np}(V)$ dans $\Gamma^n(V)$, est duale du morphisme de Frobenius : $x \mapsto x^p$ de $S^*(V^\#)$ dans lui même. Pour $p = 2$, elle est caractérisée de la manière suivante : si δ désigne la diagonale de l'algèbre de Hopf $\Gamma^*(V)$, si l'on écrit :

$$\delta(x) = \sum_i (a_i \otimes b_i + b_i \otimes a_i) + z \otimes z,$$

l'élément z est bien déterminé, et $\mathbf{V}(x) = z$.

Dans tout ce qui suit on se place sur un corps premier $\mathbb{F}_p$; cependant, d'après [**12**], les résultats s'étendent sans difficulté à un corps fini quelconque.

1. Le groupe additif et le dual de Milnor

1.1. Le groupe additif. — Une manière (due à J. Morava et P. Cartier) d'introduire l'algèbre de Steenrod est de commencer par décrire son dual. Celui-ci apparaît naturellement en considérant les automorphismes du groupe formel additif $\mathbb{G}_a$, plus précisement de la complétion formelle $\widehat{\mathbb{G}}_a$ de $\mathbb{G}_a$. Une *loi de groupe formel* commutatif, à coefficients dans un anneau A, est une série formelle $F(X, Y) \in A[[X, Y]]$ qui satisfait aux propriétés suivantes :

– $F(X, 0) = F(0, X) = X$,
– $F(X, Y) = F(Y, X)$,
– $F(X, F(Y, Z)) = F(F(X, Y), Z)$.

Rappelons aussi qu'une A-algèbre de Hopf est la donnée :

– d'une A-algèbre L, d'unité $\eta : A \to L$ et de multiplication μ ;

– d'une application d'algèbres $\delta : L \to L \otimes L$ qui admet une coünité $\varepsilon : L \to A$, et est coassociative.

Les secondes conditions signifient que :

– $\varepsilon \circ \eta$ est l'identité de A ;
– que : $\mu \circ (\varepsilon \otimes \mathrm{Id}_L) \circ \delta = \mathrm{Id}_L$ et $\mu \circ (\mathrm{Id}_L \otimes \varepsilon) \circ \delta = \mathrm{Id}_L$;
– enfin que : $(\delta \otimes \mathrm{Id}_L) \circ \delta = (\mathrm{Id}_L \otimes \delta) \circ \delta$.

Si, de plus, $\delta = \tau \circ \delta$, où τ est l'échange des deux facteurs du produit tensoriel, l'algèbre est dite cocommutative.

L'anneau $A[[X]]$ est muni de la topologie X-adique, et l'anneau $A[[X,Y]]$ de la topologie (X,Y)-adique. Les applications d'algèbres considérées ci-dessous sont toujours supposées continues pour ces topologies. La définition d'une algèbre de Hopf (donnée ci-dessus) est ainsi étendue à ce contexte topologique. Les relations définissant un groupe formel F expriment que $A[[X]]$, muni de la diagonale :

$$\delta : A[[X]] \longrightarrow A[[X_1,X_2]]^{\wedge}$$

définie par : $\delta(X) = F(X_1,X_2)$, est une algèbre de Hopf topologique cocommutative. Ci-dessus, on a dû compléter l'anneau $A[[X_1,X_2]]$ de manière *ad hoc*. L'existence de la coünité résulte de la première condition, la cocommutativé résulte de la seconde, et la coassociativité de la troisième.

Un endomorphisme du groupe formel est, par définition, un endomorphisme continu de la A-algèbre de Hopf $A[[X]]$. Une telle application est entièrement déterminée par l'image de X, qui est une série formelle $\ell(X)$, sans terme constant, telle que :

$$F(\ell(X),\ell(Y)) = \ell(F(X,Y)).$$

On vérifie facilement que si à ϕ et ψ sont associées respectivement les séries formelles h et ℓ, à $\psi\circ\phi$ correspond $h\circ\ell$. Dans le cas du groupe additif $\mathbb{G}_a(X,Y) = X+Y$ (ou de sa complétion formelle) la série formelle associée à un endomorphisme est donc telle que : $\ell(X+Y) = \ell(X)+\ell(Y)$. Si L est une $\mathbb{F}_2$-algèbre, les séries formelles qui vérifient cette équation sont de la forme :

$$\sum_i a_i X^{2^i}, \quad a_i \in L.$$

Un tel endomorphisme est un automorphisme si, et seulement si, a_0 est une unité de L. Un automorphisme est dit *spécial* si $a_0 = 1$. Le groupe des automorphismes spéciaux est noté simplement $\Gamma(L)$ pour $\widetilde{\mathrm{Aut}}_{\mathbb{G}_a}(L)$. On a une équivalence naturelle

$$\Gamma(L) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2\text{-Alg}}(\mathbb{F}_2[\xi_i], L),$$

qui, à $\phi\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_2\text{-Alg}}(\mathbb{F}_2[\xi_i],L)$, associe $\ell_\phi = X+\sum_{i>0}\phi(\xi_i)X^{2^i}$. On note $\mathcal{A}_2^*$ l'algèbre $\mathbb{F}_2[\xi_i]$, l'algèbre des fonctions régulières sur le schéma en groupes Γ.

Le fait que le foncteur Γ prenne valeurs dans la catégorie des groupes implique que l'algèbre $\mathcal{A}_2^* = \mathbb{F}_2[\xi_i]$ hérite d'une structure d'algèbre de Hopf. La diagonale δ est le produit $g*d$, pour la structure de groupe, des applications canoniques g,d : $\mathcal{A}_2^*\to(\mathcal{A}_2^*)^{\otimes 2}$ données respectivement par $x\mapsto x\otimes 1$ et $x\mapsto 1\otimes x$. Les propriétés de coassociativité et coünité de δ se déduisent directement des propriétés d'associativité et d'unité du groupe $\Gamma((\mathcal{A}_2^*)^{\otimes 2})$.

Théorème 1.1. — *On a :*

$$\delta(\xi_\ell) = \sum_{\substack{i+j=\ell,\\ i,j\geqslant 0}} \xi_i^{2^j}\otimes\xi_j.$$

Dans cette formule, par convention, $\xi_0 = 1$.

Démonstration. — Si ϕ et ψ sont des endomorphismes, on a : $\ell_{\phi*\psi} = \ell_\psi \circ \ell_\phi$. Or, par définition :

$$\ell_g = X + \sum_{i>0} (\xi_i \otimes 1) X^{2^i},$$

et

$$\ell_d = X + \sum_{i>0} (1 \otimes \xi_i) X^{2^i}.$$

Il en résulte, en posant $\xi_0 = 1$:

$$\ell_\delta = \ell_{g*d} = \ell_d \circ \ell_g = \sum_{j\geqslant 0} 1 \otimes \xi_j \Big(\sum_{i\geqslant 0} (\xi_i \otimes 1) X^{2^i} \Big)^{2^j} = \sum_{i,j\geqslant 0} (\xi_i^{2^j} \otimes \xi_j) X^{2^{i+j}}. \qquad \square$$

Introduisons une graduation sur $\mathcal{A}_2^*$ en posant $|\xi_i| = -2^i + 1$. L'application δ respecte cette graduation. Considérons donc $\mathcal{A}_2^*$ comme algèbre de Hopf graduée.

Définition 1.2. — L'algèbre de Steenrod modulo 2 $\mathcal{A}_2$ est l'algèbre de Hopf graduée duale de $\mathcal{A}_2^*$.

Précisons que, par définition, $\mathcal{A}_2^k = ((\mathcal{A}_2^*)_{-k})^{\#}$. Ainsi, l'algèbre graduée $\mathcal{A}_2$ est non nulle en degrés positifs ou nuls. Indexons la base monomiale de l'algèbre $\mathcal{A}_2^*$ par les multi-indices, en notant ξ^R le monôme $\xi_1^{r_1}, \dots \xi_h^{r_h}$ pour un multi-indice $R = (r_1, \dots, r_h)$. Une base graduée de $\mathcal{A}_2$ est obtenue par dualisation :

Définition 1.3. — Soit $\{\xi^R \mid h \geqslant 0,\ R = (r_1, \dots, r_h),\ r_i \geqslant 0, r_h > 0\}$ la base monomiale de $\mathcal{A}_2^*$. Les éléments de sa base duale sont notés $\mathrm{Sq}(R)$. Cette base est appelée base de Milnor de $\mathcal{A}_2$. Les éléments $\mathrm{Sq}(i)$ sont notés Sq^i.

Définition 1.4. — L'excès de l'opération $\mathrm{Sq}(r_1, \dots, r_h)$ est l'entier $r_1 + \cdots + r_h$.

Remarque 1.5. — L'homomorphisme de $\mathbb{F}_2$-algèbres de M vers $\mathbb{F}_2$, qui envoie ξ_1 vers 1 et les autres générateurs ξ_i, $i > 1$, vers 0, n'est pas un élément de ce dual, mais du produit $\prod_i \mathcal{A}_2^i$: c'est « le produit » des formes linéaires prenant la valeur 1 sur ξ_1^i et la valeur 0 sur les autres mônomes. Cette opération est appelée opération de Steenrod totale. On la note dans ce texte $\mathbf{Sq}^{(1)} = 1 + \mathrm{Sq}^1 + \mathrm{Sq}^2 + \cdots + \mathrm{Sq}^i + \cdots$, ou simplement $\mathbf{Sq}$.

On peut définir plus généralement $\mathbf{Sq}^{(j)}$ comme étant l'homomorphisme de $\mathbb{F}_2$-algèbres de $\mathcal{A}_2^*$ vers $\mathbb{F}_2$ qui envoie ξ_j vers 1 et les autres générateurs ξ_i, $i \neq j$, vers 0.

1.2. Le cas $p > 2$. — Tout ce qu'on vient de dire s'étend à la caractéristique $p > 2$. Soit $\Gamma_p(L)$ le schéma en groupes des séries formelles de la forme $X + a_1 X^p + \cdots + a_k X^{p^k} + \cdots$, où les a_i appartiennent à une $\mathbb{F}_p$-algèbre. On a :

Théorème 1.6. — *L'algèbre des fonctions régulières sur le schéma en groupes* $L \mapsto \Gamma_p(L) = \widetilde{\mathrm{Aut}}_{\mathbb{G}_a}(L)$ *est isomorphe à* $\mathbb{F}_p[\xi_i,\ i \geqslant 0]$. *Sa structure d'algèbre de Hopf est* *déterminée par :*

$$\delta(\xi_\ell) = \sum_{\substack{i+j=\ell,\\ i,j\geqslant 0}} \xi_i^{p^j} \otimes \xi_j.$$

Dans cette formule, par convention $\xi_0 = 1$.

Ajoutons une graduation en posant : $|\xi_i| = -2(p^i - 1)$. L'application δ la respecte. On peut alors procéder comme ci-dessus. Cependant (pour $p > 2$) ce résultat ne permet de décrire que la sous-algèbre de l'algèbre de Steenrod engendrée par les puissances réduites, et il ne rend pas compte de l'homomorphisme de Bockstein.

Pour expliquer comment obtenir toute l'algèbre, commençons par revenir au cas $p = 2$. Soit L une $\mathbb{F}_2$-algèbre. On peut décrire $\Gamma(L)$ de la manière suivante. On considère la catégorie $L - \mathcal{A}N^+$ des L-algèbres commutatives augmentées sur L dont tout élément de l'idéal d'augmentation est nilpotent. On vérifie facilement :

Proposition 1.7. — *Le groupe* $\Gamma(L)$ *est isomorphe au sous-groupe des équivalences naturelles du foncteur idéal d'augmentation,* $\mathcal{I}$*, de la catégorie* $L - \mathcal{A}N^+$ *vers celle des* L*-modules, constitué des équivalences naturelles égales à l'identité sur les algèbres dont tout élément dans l'idéal d'augmentation est de carré nul.*

Cette construction s'étend aussi à $p > 2$, mais encore une fois ceci ne définit que la sous-algèbre de l'algèbre de Steenrod modulo p engendrée par les puissances réduites P^i. Pour obtenir toute l'algèbre $\mathcal{A}_p$, on procède comme suit.

On considère les $\mathbb{F}_p$-algèbres $\mathbb{Z}/2$-graduées commutatives ; la commutativité s'entend ici au sens gradué : $xy = (-1)^{|x|\,|y|}yx$ pour tous x, y homogènes ; en particulier les éléments de degré 1 sont de carré nul. Le foncteur oubli $\mathcal{O}$, de cette catégorie vers la catégorie des $\mathbb{F}_p$-algèbres (commutatives ou non), associe à L la somme directe $L^0 \oplus L^1$.

Soit donc L une $\mathbb{F}_p$-algèbre $\mathbb{Z}/2$-graduée commutative. On introduit la sous-catégorie $L - \mathcal{A}N_p^+$ des L-algèbres ($\mathbb{Z}/2$-graduées, commutatives) augmentées sur L dont tout élément de l'idéal d'augmentation est nilpotent. Le foncteur idéal d'augmentation, $\mathcal{I}$, est défini de cette catégorie vers la catégorie des $\mathcal{O}(L)$-modules.

Définition 1.8. — Le groupe $\widetilde{\Gamma}_p(L)$ est le sous-groupe des équivalences naturelles du foncteur idéal d'augmentation constitué des équivalences naturelles égales à l'identité sur les algèbres dont tout élément dans l'idéal d'augmentation est de carré nul.

Proposition 1.9. — *Le groupe* $\widetilde{\Gamma}_p(L)$ *est produit semi-direct du groupe* $\Gamma_p(L^0)$ *par le groupe* $(L^1)^{\mathbb{N}}$.

Les conditions imposées montrent que pour une algèbre M dans la catégorie une telle transformation naturelle ϕ est donnée par la formule :

$$\phi(x+u) = x + \sum_{i>0} a_i x^{p^i} + \sum_{j\geqslant 0} b_j x^{p^j} + u$$