Panoramas & Synthèses
18, 2004, p. 123–156

LE PROBLÈME GÉOMÉTRIQUE DU VOYAGEUR DE COMMERCE, ET SES APPLICATIONS À L'ANALYSE COMPLEXE ET HARMONIQUE

par

Hervé Pajot

Résumé. — Nous présentons une caractérisation des sous-ensembles des courbes rectifiables de $\mathbb{R}^n$ due à Peter Jones, ainsi que la théorie de la rectifiabilité uniforme développée par Guy David et Stephen Semmes. Nous en donnons ensuite des applications à l'analyse harmonique (continuité L^2 de l'opérateur de Cauchy) et à l'analyse complexe (effaçabilité pour les fonctions holomorphes bornées).

Abstract **(The geometric traveling salesman problem and its applications to complex and harmonic analysis)**

We present the characterization of subsets of rectifiable curves in $\mathbb{R}^n$ given by Peter Jones, and also the theory of uniform rectifiable sets as developed by Guy David and Stephen Semmes. We then give applications to harmonic analysis (L^2 continuity of the Cauchy operator) and complex analysis (removability for bounded analytic functions).

Introduction

J.-P. Kahane écrit, dans l'introduction (§ 1) au présent volume, qu'un des descendants de l'intégrale de Lebesgue est la théorie géométrique de la mesure. Dans cet article, nous allons décrire un des aspects de cette théorie, à savoir l'étude des propriétés de rectifiabilité des sous-ensembles des espaces euclidiens. Rappelons qu'un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est d-rectifiable si on peut le recouvrir (à un ensemble de mesure de Hausdorff nulle près) par une union dénombrable d'images lipschitziennes de $\mathbb{R}^d$. Ces ensembles jouent un rôle important dans le calcul des variations, les systèmes dynamiques, l'approximation diophantienne... Sous des hypothèses de finitude de la mesure de Hausdorff, il existe diverses caractérisations des ensembles rectifiables en

Classification mathématique par sujets **(2000).** — 28A75, 30C85, 42B20.
Mots clefs. — Capacité analytique, courbure de Menger, intégrale de Cauchy, mesures de Hausdorff, rectifiabilité, rectifiabilité uniforme.

Durant l'écriture de cet article, l'auteur était partiellement supporté par le réseau européen TMR « Harmonic Analysis and Related Problems (HARP) » et bénéficiait d'une délégation au CNRS.

termes d'existence de tangentes, de densité ou de taille des projections. Ceci est la théorie classique de la rectifiabilité, développée entre autres par A.S. Besicovitch et H. Federer. Ce qui va nous intéresser dans la suite sera une étude plus quantitative de ces propriétés géométriques. Ainsi, le principal problème qui sera discuté est une version du problème du voyageur de commerce dans laquelle on autorise le nombre de villes que le représentant doit visiter à être infini :

Soit E un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$. À quelle(s) condition(s) (si possible quantitative(s)) E est-il contenu dans une courbe rectifiable de $\mathbb{R}^n$ (c'est-à-dire une courbe de longueur finie) ?

En introduisant les nombres β qui mesurent en tout point et à toutes les échelles la qualité de l'approximation de E par des droites, P. Jones a donné une solution complète au problème précédent. Son travail a motivé le développement par G. David et S. Semmes de la théorie de la rectifiabilité uniforme. Dans cet article, nous décrirons quelques-uns de leurs résultats ainsi que deux applications en analyse :

– *Continuité L^2 de l'opérateur de Cauchy sur des ensembles Ahlfors-réguliers.* Un cas important est celui des graphes lipschitziens pour lesquels la continuité de l'opérateur de Cauchy avait été conjecturée par A. Zygmund et A.P. Calderón dans les années 1950. Cette conjecture a été résolue par A.P. Calderón (si la constante de Lipschitz est assez petite) puis par R. Coifman, A. McIntosh et Y. Meyer (dans le cas général). Nous en esquisserons une preuve géométrique utilisant les nombres β. Nous donnerons aussi diverses caractérisations des ensembles Ahlfors-réguliers sur lesquels l'opérateur de Cauchy est borné (au sens L^2). Ici, une autre quantité géométrique, à savoir la courbure de Menger, permettra de faire le lien entre les propriétés analytiques de l'ensemble et sa géométrie.

– *Problème de Painlevé.* Il consiste à donner une caractérisation géométrique des sous-ensembles compacts du plan complexe qui sont effaçables pour les fonctions holomorphes bornées. Ce problème a connu récemment des avancées très spectaculaires dans lesquelles la théorie quantitative de la rectifiabilité a joué un rôle important.

Le lecteur intéressé trouvera en appendice une présentation (un peu) plus détaillée de la théorie de la rectifiabilité uniforme de David et Semmes. Le reste du texte peut être lu en omettant sa lecture. Pour plus de détails sur les thèmes abordés dans ces notes, nous renvoyons au livre récent [**38**] et à sa longue bibliographie.

Notation. — $\mathcal{L}^n$ désigne la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$. Si x et y sont deux points de $\mathbb{R}^n$, alors $|x-y|$ est la distance (euclidienne) entre x et y.

1. Mesures et dimension de Hausdorff

La mesure de Lebesgue a un peu plus de 100 ans. La mesure de Hausdorff est plus jeune, ses origines remontent aux travaux de C. Carathéodory [**4**] et F. Hausdorff [**22**].

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ et soit $d \in [0, n]$. On définit la d-mesure de Hausdorff de E par

$$H^d(E) = \lim_{\delta \to 0} \left(\sup \left\{ \sum_i (\operatorname{diam} U_i)^d ; E \subset \cup_i U_i, \operatorname{diam} U_i < \delta \right\} \right).$$

Notons qu'ici les recouvrements considérés sont (au plus) dénombrables. Alors, H^d est une mesure de Borel régulière. Elle n'est pas de Radon (sauf si $d = n$) car elle n'est pas localement finie. Par un argument élémentaire, on peut montrer que $\inf\{s; H^s(E) = 0\} = \sup\{t; H^t(E) = +\infty\}$. Cette valeur commune est appelée la dimension de Hausdorff de E. On la notera $\operatorname{Hdim}(E)$. D'après le lemme de Frostman [**29**], $\operatorname{Hdim}(E)$ est aussi le sup des s tels qu'il existe une mesure de probabilité μ supportée par E et à croissance hölderienne d'ordre s (c'est-à-dire, pour toute boule B de $\mathbb{R}^n$, $\mu(B) \leqslant C (\operatorname{diam} B)^s$ où $C > 0$ ne dépend que de μ). Considérons maintenant une fonction strictement croissante $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telle que $h(0) = 0$. On lui associe une mesure de Hausdorff Λ_h par

$$\Lambda_h(E) = \lim_{\delta \to 0} \left(\sup \left\{ \sum_i h(\operatorname{diam} U_i) ; E \subset \cup_i U_i, \operatorname{diam} U_i < \delta \right\} \right).$$

Ainsi, $H^d = \Lambda_h$ où h est la fonction (que l'on appelle aussi gauge) $h(t) = t^d$.

Donnons quelques exemples d'estimation de la dimension et de la mesure de Hausdorff.

– *L'ensemble triadique de Cantor* ([**16**], pages 14-15).

Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on considère les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants

$$I_j = \bigcup_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{3^j - 1} \left[\frac{k}{3^j}, \frac{k+1}{3^j} \right].$$

On pose $E_1 = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} I_j$. Alors, $\operatorname{Hdim}(E_1) = \log 2 / \log 3$ et $H^{\log 2/\log 3}(E_1) = 1$.

– *L'ensemble de Cantor* 4 *coins* ([**38**], pages 6-7).

Soit $F_0 = [0, 1]^2$ le carré unité dans $\mathbb{C}$. Découpons F_0 en 16 carrés égaux de longueur de côté $\frac{1}{4}$. L'ensemble F_1 est l'union des 4 carrés situés dans les coins de F_0. Puis, on découpe chacun des 4 carrés en 16 carrés identiques et l'ensemble F_2 est l'union des 16 carrés qui sont situés dans les coins des 4 carrés de F_1. En itérant cette construction, on construit une suite de sous-ensembles $(F_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{C}$, chacun des F_j étant formé de 4^j carrés de longueur de côté 4^{-j} qui sont situés dans les coins des carrés de F_{j-1}. Soit $E_2 = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} F_j$. Alors, $\operatorname{Hdim}(E_2) = 1$ et $H^1(E_2) = \sqrt{2}$.

– *La courbe de Von Koch* ([**29**], pages 65-67).

Soit $J_0 = [0, 1]$ l'intervalle unité situé sur la droite réelle de $\mathbb{C}$. On divise J_0 en trois segments identiques et on substitue au segment du milieu deux segments formant avec lui un triangle équilatéral. On note J_1 la ligne polygonale ainsi obtenue, puis on applique la même substitution à chaque segment de J_1. On obtient une nouvelle ligne polygonale J_2 formé de 4^2 segments de longueur 3^{-2}. En itérant, on obtient une suite de lignes polygonales $(J_j)_{j\in\mathbb{N}}$ qui converge (en un sens approprié) vers une courbe de $\mathbb{C}$ que l'on note E_3. Notons que la longueur de E_3 est infinie. En fait, $\mathrm{Hdim}(E_3) = \log 4/\log 3$ et $H^{\log 4/\log 3}(E_3) = 1$.

Considérons les trois ensembles E_i, $i = 1, 2, 3$, comme des sous-ensembles de $\mathbb{C}$. Il est clair que $\mathcal{L}^2(E_i) = 0$ $(i = 1, 2, 3)$. Pourtant, leurs dimensions de Hausdorff sont très différentes. D'un autre côté, si $E \subset \mathbb{R}^n$, alors

$$(*) \qquad \mathcal{L}^n(E) = c(n)H^n(E),$$

où $c(n) = \frac{\pi^{n/2}}{2^n(n/2)!}$. En particulier, $c(1) = 1$ (c'est-à-dire $\mathcal{L}^1$ et H^1 coïncident) et $c(2) = \pi/4$. Remarquons aussi que $(*)$ implique que pour toute boule $B(x,R)$ de $\mathbb{R}^n$, $H^n(B(x,R)) = (2R)^n$. La preuve de $(*)$ est délicate (voir [**17**, p. 197]), elle repose sur l'inégalité isodiamétrique : pour tout $A \subset \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{L}^n(A) \leqslant \frac{\pi^{n/2}\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{diam}\,A\right)^n}{(n/2)!}$$

(le membre de droite est la mesure de Lebesgue d'une boule de $\mathbb{R}^n$ de même diamètre que A). Ainsi, en un certain sens, la mesure de Hausdorff est une « extension » de la notion de mesure de Lebesgue. Nous allons voir dans la suite qu'elle n'est pas que cela !

2. Qu'est ce qu'une courbe rectifiable ?

Une courbe Γ de $\mathbb{R}^n$ est un ensemble de la forme $\Gamma = \phi(I)$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\phi : I \to \mathbb{R}^n$ est une application continue. Si, de plus, ϕ est injective, on dit que Γ est une courbe de Jordan. Dans le cas où ϕ est lipschitzienne, on dit que Γ est une courbe lipschitzienne. On rappelle que $\phi : I \to \mathbb{R}$ est K-lipschitzienne (ou tout simplement lipschitzienne) si $|\phi(x)-\phi(y)| \leqslant K|x-y|$ pour tout x, tout y dans I. Pour simplifier la présentation, on supposera dans un premier temps que I est un intervalle fermé borné, c'est-à-dire $I = [a,b]$ où $a < b$ (ceci nous permettra d'éviter quelques problèmes techniques liés aux extrémités).

On définit la longueur d'une courbe Γ, notée $l(\Gamma)$, par

$$l(\Gamma) = \sup \sum_{i=1}^{N} |\phi(t_i) - \phi(t_{i-1})|$$

où le sup est pris sur toutes les subdivisions $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = b$ de $[a,b]$. Si la longueur $l(\Gamma)$ est finie, on dit que Γ est une courbe rectifiable. Dans ce cas, et si de plus Γ est de Jordan, il existe un paramétrage particulier de Γ appelé paramétrage par longueur d'arc. Il est donné par l'application $s : [0, l(\Gamma)] \to \mathbb{R}^n$ tel que $s(t)$ est l'unique point $\phi(u)$ de Γ tel que $l([a,\phi(u)]) = t$. Il est clair que s est 1-lipschitzienne. Notons qu'une courbe lipschitzienne est rectifiable (dans la mesure où l'intervalle I est supposé borné. Sinon, elle est localement rectifiable). Dans la section précédente, nous avons vu que si Γ est un segment de $\mathbb{R}$, $H^1(\Gamma) = \mathcal{L}^1(\Gamma)$, et donc $H^1(\Gamma) = l(\Gamma)$. En fait, ceci reste vrai pour toute courbe de Jordan.

Théorème 1. — *Soit Γ une courbe de Jordan de $\mathbb{R}^n$. Alors, $l(\Gamma) = H^1(\Gamma)$.*

Démonstration. — On commence par deux lemmes techniques.

Lemme 2. — *Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ une application K-lipschitzienne et soit $A \subset \mathbb{R}^d$. Alors, pour tout $s \in [0, n]$, $H^s(f(A)) \leqslant K^s H^s(A)$.*

On laisse la preuve de ce lemme comme exercice.

Lemme 3. — *Soit C une courbe joignant deux points x et y dans $\mathbb{R}^n$. Alors, $H^1(C) \geqslant |x - y|$.*

Pour démontrer ce lemme, considérons la projection orthogonale P sur la droite passant par x et y. Comme p est 1-lipschitzienne, le lemme 2 donne

$$H^1(C) \geqslant H^1(p(C)) \geqslant H^1([x, y]) = \mathcal{L}^1([x, y]) = |x - y|.$$

Passons maintenant à la démonstration du théorème. Pour cela, soit $\Gamma = \phi([a, b])$. Alors, d'après le lemme 3, pour tout couple $(u, v) \in [a, b]^2$, $H^1(\phi[u, v]) \geqslant |\phi(u) - \phi(v)|$. D'où, pour toute subdivision $a = t_0 < \cdots < t_i < \cdots < t_N = b$ de $[a, b]$, on a

$$\sum_{i=1}^{N} |\phi(t_i) - \phi(t_{i-1})| \leqslant \sum_{i=1}^{N} H^1(\phi([t_i, t_{i-1}])) = H^1(\Gamma).$$

En prenant le sup sur toutes les subdivisions de $[a, b]$, on obtient $l(\Gamma) \leqslant H^1(\Gamma)$. Démontrons maintenant l'inégalité inverse. Si $l(\Gamma) = +\infty$, elle est triviale. Si $l(\Gamma)$ est finie, on peut considérer la paramétrisation par longueur d'arc s de Γ. Comme s est 1-lipschitzienne, d'après le lemme 2, $H^1(\Gamma) = H^1(s([0, l(\Gamma)])) \leqslant l(\Gamma)$. □

Ce qui peut paraître surprenant, c'est que tout ensemble compact connexe de 1-mesure de Hausdorff finie est « presque » une courbe rectifiable. Plus précisément, nous avons le

Théorème 4. — *Soit E un continuum (c'est-à-dire un sous ensemble compact connexe) de $\mathbb{R}^n$. On suppose que $H^1(E) < +\infty$. Alors, il existe une courbe rectifiable Γ de $\mathbb{R}^n$ telle que $E \subset \Gamma$ et $H^1(E) \leqslant l(\Gamma) \leqslant C H^1(E)$ où $C \geqslant 1$ est une constante absolue.*

Voir [**13**] pages 6–7 pour une preuve.

Terminons cette section en définissant une notion plus générale de rectifiabilité. Dans l'introduction, nous avons rappelé qu'un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est dit d-rectifiable (au sens de la théorie géométrique de la mesure) s'il existe un nombre dénombrable d'applications lipschitziennes $f_j : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ telles que $H^d(E \smallsetminus \cup_j f_j(\mathbb{R}^d)) = 0$. Une courbe rectifiable Γ de $\mathbb{R}^n$ est 1-rectifiable (Pour voir cela, utiliser la paramétrisation par longueur d'arc). D'un autre côté, un ensemble E est dit purement non d-rectifiable si et seulement si $H^d(E \cap F) = 0$ pour tout ensemble d-rectifiable F de $\mathbb{R}^n$. Dans le cas