Panoramas & Synthèses
18, 2004, p. 63–84

MESURE INVARIANTE ET ÉQUIRÉPARTITION DANS LES GROUPES COMPACTS

par

Bruno Sévennec

Résumé. — Dans cet article, on donne un survol de résultats d'équirépartition dans les groupes compacts, et plus généralement dans les espaces homogènes de tels groupes. Dans le premier chapitre, on reproduit la belle preuve de von Neumann sur l'existence et l'unicité de la mesure de Haar des groupes compacts, où l'on voit qu'elle est obtenue comme limite de mesures à support fini, qui « s'équirépartissent » selon la mesure de Haar. Dans le chapitre 2, on donne des exemples explicites d'équirépartition : le théorème de Weyl (1916) sur les rotations irrationnelles, celui d'Arnol'd et Krylov (1963) pour les rotations sur la sphère $\mathbb{S}^2$, et sa généralisation par Guivarc'h (1969). Le chapitre 3 concerne une mesure de la vitesse d'équirépartition des ensembles obtenus par composition d'un nombre fini d'isométries d'un espace métrique compact. C'est le « trou spectral » de l'opérateur de moyenne associé. Enfin le chapitre 4 passe d'abord en revue la construction, due à Lubotzky, Phillips et Sarnak (1986) de rotations de la sphère $\mathbb{S}^2$ avec trou spectral maximal. Après avoir évoqué l'application de ce résultat au problème de Ruziewicz, on discute d'une construction récente de familles de rotations ayant un trou spectral basée sur des arguments plus élémentaires (Gamburd, Jakobson, Sarnak 1999), et qui soulève des questions de type « approximation diophantienne » dans le groupe des rotations.

***Abstract* (Invariant measure and equidistribution in compact groups).** — This paper surveys some equidistribution results in compact groups and their homogeneous spaces. The first chapter is devoted to von Neumann's beautiful proof of the existence and uniqueness of Haar's measure on compact groups, where one sees that it is obtained as a limit of "equidistributing" measures with finite supports. Some explicit examples are reviewed in chapter 2: Weyl's theorem on irrational rotations (1916), Arnol'd and Krylov's (1963) concerning rotations of the sphere $\mathbb{S}^2$ and its generalization by Guivarc'h (1969). Chapter 3 is devoted to a quantity measuring the equidistribution speed of sets obtained by composing a finite number of isometries of a compact space, the "spectral gap" of the associated averaging operator. In the last chapter, one first reviews the construction by Lubotzy, Phillips and Sarnak (1986) of rotations of $\mathbb{S}^2$ with maximal spectral gap. The application of this result to Ruziewicz's problem is then sketched, before going to the recent construction of families of rotations with spectral gap by Gamburd, Jakobson, Sarnak (1999). It relies on more elementary methods than the previous one, and suggests questions of "diophantine approximation" type in rotations group.

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 22C05, 28C10, 11K36, 37A30, 01A60.
Mots clefs. — Mesure de Haar, groupe compact, équirépartition, trou spectral.

Introduction

Cet article rassemble divers résultats concernant l'équirépartition de familles finies d'éléments dans les groupes compacts (métrisables) et leurs espaces homogènes.

Le point de départ de la discussion est la belle preuve due à von Neumann (1933) de l'existence et de l'unicité d'une mesure de probabilité invariante (« mesure de Haar ») sur tout groupe compact. Cette mesure apparaît comme limite de mesures de comptage normalisées de familles finies d'éléments du groupe. On dit que ces familles s'équirépartissent selon la mesure de Haar.

Dans le chapitre suivant, on donne des exemples plus explicites d'équirépartition. On montre d'abord, par un argument « à la von Neumann », le théorème de Weyl (1916) affirmant l'équirépartition modulo 1 des multiples de tout nombre irrationnel.

On discute ensuite un théorème d'Arnol'd et Krylov (1963). Ce résultat énonce que si deux rotations $a, b \in \mathrm{SO}(3)$ engendrent un monoïde M ayant une orbite dense sur $\mathbb{S}^2$, alors l'orbite $M \cdot x$ de tout point x est dense, et les familles $M_n \cdot x$ s'équirépartissent selon la probabilité uniforme sur $\mathbb{S}^2$, où M_n désigne la famille des 2^n mots de longueur n en a, b. La démonstration présentée est due à Guivarc'h (1969) et vaut dans un cadre plus général, où a, b sont deux isométries d'un espace métrique homogène compact X, et l'équirépartition se fait selon ν, unique probabilité sur X invariante par isométries.

Un théorème analogue sur l'équirépartition des familles $\Sigma_n \cdot x$, où Σ_n désigne la famille des $4 \cdot 3^{n-1}$ mots réduits de longueur n en $a^{\pm 1}, b^{\pm 1}$, est ensuite démontré en suivant encore Guivarc'h, qui lui-même généralise un autre énoncé d'Arnol'd-Krylov.

La preuve utilise de façon cruciale la décomposition spectrale de l'opérateur autoadjoint

$$S_1 = \frac{1}{4}(T_a + T_a^{-1} + T_b + T_b^{-1})$$

sur $L^2(X, \nu)$ et de ses opérateurs affiliés de « moyenne sphérique »

$$S_n = \frac{1}{4.3^{n-1}} \sum_{s \in \Sigma_n} T_{s(a,b)} = P_n(S_1).$$

Dans le chapitre 3, on introduit la propriété de « trou spectral » pour l'opérateur

$$T = \frac{1}{2k} \sum_{i=1}^{k} (T_{a_i} + T_{a_i}^{-1})$$

associé à une famille finie $a_1, \ldots, a_k$ d'isométries d'un espace métrique homogène compact X. Cet opérateur est autoadjoint de norme 1 sur $L^2(X, \nu)$, et on dit qu'il a un trou spectral si sa restriction au sous-espace invariant $L^2_0(X, \nu)$ des fonctions de moyenne nulle est de norme < 1.

Cette propriété entraîne non seulement l'équirépartition des $\Sigma_n \cdot x$ pour tout $x \in X$ mais aussi que la convergence des moyennes sphériques $S_n f \to \int_X f \, d\nu$ est exponentiellement rapide en norme L^2 pour toute fonction $f \in L^2(X, \nu)$ (c'est bien sûr également le cas des $T^n f$).

On montre ensuite

$$\|T\|_{L^2_0(X,\nu)} \geqslant \frac{1}{k}\sqrt{2k-1}.$$

Cette inégalité pour $X = \mathbb{S}^2$ est démontrée dans [**23**], avec une preuve qui semble difficile à adapter au cas général. Elle est à rapprocher d'une inégalité identique (avec $d = 2k$) due à Alon et Boppana [**8**] pour le spectre asymptotique des familles infinies de graphes réguliers $G_{n,d}$ de valence $d = 2k$ à n sommets :

$$\liminf_n \lambda_1(G_{n,d}) \geqslant \frac{2}{d}\sqrt{d-1}.$$

Il serait intéressant d'avoir une preuve unifiée de ces deux résultats.

Le dernier chapitre passe d'abord en revue la construction due à Lubotzky-Phillips-Sarnak (1986) [**23**] de rotations de la sphère $\mathbb{S}^2$ avec trou spectral maximal, conduisant donc à une équirépartition « optimale ».

La preuve, qui n'est qu'esquissée, fait appel à l'estimation des coefficients de Fourier de formes modulaires (conjecture de Ramanujan-Petersson) obtenue par Deligne (1974) comme corollaire de sa preuve de la conjecture de Weil.

On évoque ensuite l'application de ce résultat au problème de Ruziewicz (1916) concernant l'unicité de la mesure uniforme parmi les « probabilités » finiment additives invariantes par rotation sur la tribu de Lebesgue de $\mathbb{S}^2$.

On discute enfin de la construction récente par Gamburd-Jakobson-Sarnak (1999) [**12**] de familles de rotations ayant un trou spectral, construction basée sur des arguments élémentaires (ne faisant pas appel aux formes modulaires). La preuve soulève d'intéressantes questions du type « approximation diophantienne » dans le groupe des rotations. Notamment, les seules familles connues $(a_1, \ldots, a_k)$ de rotations présentant un trou spectral sont « algébriques ». Elles forment en particulier dans $\bigsqcup_k \mathrm{SO}(3)^k$ modulo conjugaison une dénombrable, alors qu'il n'est pas exclu selon [**12**] que presque toute famille possède cette propriété.

1. Mesure invariante

En 1933, A. Haar démontre l'existence d'une mesure invariante sur tout groupe localement compact métrisable [**14**]. L'année suivante paraît [**26**], dans lequel J. Von Neumann obtient l'existence *et l'unicité* (à un facteur près) pour les groupes compacts métrisables[(1)], et c'est sa très belle démonstration qui va d'abord nous occuper. Avant de commencer, signalons qu'il avait immédiatement appliqué le résultat de Haar dans le cas compact à la solution partielle du cinquième problème de Hilbert : un groupe compact est de Lie (analytique) si et seulement si il est localement homéomorphe à $\mathbb{R}^n$ [**25**] (voir aussi [**29**]).

(1) Il faut attendre 1936 pour qu'il obtienne (en même temps que A. Weil) l'unicité en général.

Soit G un groupe topologique compact (métrisable), et $\mathcal{C}(G)_{\mathbb{R}}$ l'espace de Banach des fonctions continues réelles sur G. La loi de groupe fournit des opérateurs de translation sur $\mathcal{C}(G)_{\mathbb{R}}$

$$T_a f(g) = f(ga).$$

Ce sont des isométries. À toute suite finie $A = (a_1, \ldots, a_n)$ d'éléments de G, on peut associer l'opérateur moyenne de translations

$$T_A = \frac{1}{n}\sum_1^n T_{a_i}.$$

Il est de norme $\leqslant 1$. Plus précisément, pour toute $f \in \mathcal{C}(G)_{\mathbb{R}}$

$$\inf f \leqslant \inf T_A f \leqslant \sup T_A f \leqslant \sup f.$$

En posant $\operatorname{osc}(f) = \sup f - \inf f$, on a donc

$$\operatorname{osc}(T_A f) \leqslant \operatorname{osc}(f).$$

Lemme 1.1. — *Pour toute* $f \in \mathcal{C}(G)_{\mathbb{R}}$,

$$\inf_A \operatorname{osc}(T_A f) = 0.$$

Démonstration. — La fonction f étant uniformément continue et bornée, $\{T_A f\}_A \subset \mathcal{C}(G)_{\mathbb{R}}$ est équicontinu borné, donc d'adhérence compacte (Ascoli). Si $\operatorname{osc}(T_{A_n} f) \to \inf_A \operatorname{osc}(T_A f)$ pour $n \to \infty$, on peut donc supposer quitte à extraire une sous-suite que $T_{A_n} f$ converge uniformément, disons vers $\varphi \in \mathcal{C}(G)_{\mathbb{R}}$.

Pour toute famille finie B d'éléments de G,

$$\operatorname{osc}(T_B \varphi) = \lim \operatorname{osc}(T_B T_{A_n} f) \geqslant \operatorname{osc}(\varphi)$$

puisque $T_B T_{A_n} = T_{BA_n}$, avec la définition « évidente » de BA_n. D'où l'égalité

$$\operatorname{osc}(T_B \varphi) = \operatorname{osc}(\varphi).$$

En particulier $\sup T_B \varphi = \sup \varphi$, et si $T_B \varphi$ atteint son maximum en $g \in G$, φ l'atteint en tout point de gB. Pour une suite $(b_i)_{i \geqslant 1}$ dense dans G, en prenant successivement $B = B_n = (b_1, \ldots, b_n)$ on obtient des g_n tels que $\varphi = \sup \varphi$ sur $g_n B_n$.

En prenant une sous-suite convergente $g_{n_k} \to g$, on voit que $\varphi = \sup \varphi$ sur l'ensemble dense des $g b_i$. Donc φ est constante, et $\inf_A \operatorname{osc}(T_A f) = \operatorname{osc}(\varphi) = 0$. $\square$

On voudrait pouvoir définir $\mu(f) = \int_G f \, d\mu = c$ dès que la constante c est limite d'une suite $T_{A_n} f$. Von Neumann appelle alors c une *moyenne à droite* de f. *A priori* elle n'est pas unique. L'astuce est de moyenner aussi à gauche, *i.e.* considérer les opérateurs $\check{T}_A = \frac{1}{n}\sum_1^n \check{T}_{a_i}$ sur $\mathcal{C}(G)_{\mathbb{R}}$, où

$$\check{T}_a f(g) = f(a^{-1} g).$$

Lemme 1.2. — *Si* $T_{A_n} f \to c$ *et* $\check{T}_{A'_n} f \to c'$ *avec* c, c' *constantes, on a* $c = c'$. *Autrement dit, toute moyenne à gauche coïncide avec toute moyenne à droite.*

Démonstration. — Remarquer que les T_A commutent aux $\check{T}_B$, fixent les constantes et sont équicontinus (de norme $\leqslant 1$), d'où

$$c = \lim \check{T}_{A'_n} T_{A_n} f = \lim T_{A_n} \check{T}_{A'_n} f = c'. \qquad \square$$

Remarque 1.3. — Notons $\mu(f)$ la valeur commune des moyennes à droite et à gauche de f. Par le même argument de commutation, on obtient aussi

$$\mu(T_A f) = \mu(f) = \mu(\check{T}_B f).$$

Théorème 1.4. — *Il existe sur $\mathcal{C}(G)_{\mathbb{R}}$ une unique forme linéaire μ continue invariante à droite (i.e. $\mu(T_a f) = \mu(f)$) prenant la valeur 1 sur la fonction constante 1. Elle est aussi invariante à gauche, positive, et définit la* mesure de Haar *(normalisée) sur G.*

Démonstration. — L'unicité vient de ce que $\lambda(f) = \lim \lambda(T_{A_n} f) = \mu(f)$ pour toute forme linéaire candidate λ.

Inversement, $f \mapsto \mu(f)$ définit une application continue $\mu : \mathcal{C}(G)_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$, homogène de degré 1, et ce qu'il reste à voir est qu'elle est additive.

$$\mu(f + f') \stackrel{?}{=} \mu(f) + \mu(f').$$

Si $\mu(f) = \lim T_{A_n} f$, on a pour tout n

$$\mu(T_{A_n} f') = \mu(f')$$

d'où pour des A'_n convenables

$$\mu(f') = \lim T_{A'_n} T_{A_n} f'.$$

Comme $\mu(f) = \lim T_{A'_n} T_{A_n} f$ est aussi vérifiée, on peut écrire

$$\mu(f) + \mu(f') = \lim T_{A'_n A_n}(f + f') = \mu(f + f'). \qquad \square$$

1.1. Équirépartition. — En itérant l'argument utilisé pour démontrer l'additivité de μ, on obtient au moyen d'un procédé diagonal[(2)] la

Proposition 1.5. — *Il existe une suite (A_n) de familles finies dans G telle $T_{A_n} f \to \mu(f)$ pour toute $f \in \mathcal{C}(G)_{\mathbb{R}}$.*

En particulier (évaluer en $e \in G$)

$$\mu(f) = \lim \frac{1}{N_n} \sum_{i=1}^{N_n} f(a_{n,i})$$

pour $A_n = (a_{n,i})_{1 \leqslant i \leqslant N_n}$, *i.e.* μ est limite (faible) des mesures de comptage normalisées

$$\mu_n = \delta_{A_n} = \frac{1}{N_n} \sum_{i}^{N_n} \delta_{a_{n,i}}.$$

[(2)] Noter que $\mathcal{C}(G)_{\mathbb{R}}$ est séparable, *i.e.* possède une partie dénombrable dense, à cause de la métrisabilité de G.