

AUTOUR DU THÉORÈME DE LA DIVERGENCE

par

Thierry De Pauw

Résumé. — Cet article constitue un tour d’horizon des théories d’intégrales conditionnellement convergentes. On y présente l’intégrale de R. Henstock et J. Kurzweil (dimension 1) et celle de W.F. Pfeffer (dimensions supérieures), en centrant l’exposition sur le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral et sur le théorème de la divergence. Chemin faisant, on traite également des ensembles à périmètre fini introduits par E. De Giorgi.

Abstract (A visit with the divergence theorem). — This paper is a survey of conditionally convergent integrals. We introduce the one-dimensional theory of R. Henstock and J. Kurzweil as well as the higher-dimensional theory due to W.F. Pfeffer. Central to our exposition are the fundamental theorem of calculus and the divergence theorem. Along the way we also study sets of finite perimeter as defined by E. De Giorgi.

Introduction

Pour quels domaines A et quels champs de vecteurs v la formule de la divergence

$$(1) \quad \int_A \operatorname{div} v = \int_{\partial A} \langle v, n_A \rangle$$

est-elle vraie ? Posons-nous d’abord la question du degré de généralité autorisé pour A . Comme c’est souvent le cas en mathématique, on peut penser à (1) comme à une définition du membre de droite par le membre de gauche, par exemple dans le cas où v est de classe C^1 et $A \subset \mathbb{R}^n$ est borné et mesurable. L’application

$$v \longmapsto (\partial A)(v) := \int_A \operatorname{div} v$$

Classification mathématique par sujets (2000). — 26A39, 26B20, 26B15, 28A75, 49Q15.

Mots clefs. — Théorème de la divergence, ensembles à périmètre fini.

Durant la rédaction de ce texte, l’auteur était soutenu par une bourse Marie Curie octroyée par la Communauté européenne dans le cadre de son programme « Human Potential », contrat numéro HMPF-CT-2001-01235.

étant ainsi définie, on peut se demander dans quels cas cette fonctionnelle agissant sur v est une mesure (vectorielle) et quelle est la structure de la mesure en question. La réponse à ce problème a été apportée par E. De Giorgi, [13, 14]. Si la fonctionnelle « ∂A » est une mesure (on dit que A est à *variation bornée*, ou encore à *périmètre fini*) alors en fait $(\partial A)(v) = \int_{\partial_* A} \langle v, n_A \rangle d\mathcal{H}^{n-1}$ où \mathcal{H}^{n-1} est la mesure de Hausdorff, n_A est une certaine « normale extérieure » et $\partial_* A$ est un sous-ensemble rectifiable de la frontière de A . Ces résultats sont décrits dans les sections 2.2, 2.3 et 2.4. On a aussi évoqué, dans la section 2.14, comment les ensembles à variation bornée et le théorème de la divergence sont liés au problème de Plateau.

On peut ensuite souhaiter lever l'hypothèse que v soit de classe C^1 . Par exemple, (1) reste valide si l'on suppose seulement que v est lipschitzien ; dans ce cas le théorème de Rademacher assure que v est dérivable presque partout, en outre $\operatorname{div} v$ est essentiellement bornée. Cependant, il existe des champs de vecteurs v partout dérivables, qui oscillent très vite, et dont la divergence n'est pas localement Lebesgue intégrable. Se pose alors la question du sens du membre de gauche : comment faut-il interpréter l'intégrale $\int_A \operatorname{div} v$? La réponse à ce problème se trouve dans des théories de l'intégration qui généralisent celle de Lebesgue. On les appelle intégrales *non absolument convergentes*, ou *conditionnellement convergentes*, précisément parce que l'intégrabilité d'une fonction f n'entraîne pas celle de $|f|$. L'intégrale $\int_A f$ que nous présentons dans la seconde partie de ce tour d'horizon (et qui est due à W.F. Pfeffer [46]) est définie par des sommes de Riemann $\sum_i f(x_i) |A_i|$ (où $|A_i|$ désigne la mesure de A_i). Les domaines d'intégration A , tout comme les éléments A_i des partitions, seront à variation bornée, comme on l'a suggéré au premier paragraphe. La théorie repose sur un théorème de recouvrement (théorème 18) par des A_i qui ont une certaine propriété d'isopérimétrie approximative (voir section 2.1), comme on s'y attend si l'on veut disposer de « théorèmes de dérivation ». Un tel théorème de dérivation est énoncé sous forme d'une version générale de la formule de la divergence (théorème 25) : ce résultat est dû à W.F. Pfeffer [46, 9.13] (H. Federer [21, 6.2] avait obtenu un résultat semblable, restreint toutefois aux divergences $\operatorname{div} v$ bornées ; voir aussi [49]). Finalement, on a montré comment ce théorème s'applique à l'étude des ensembles de singularités effaçables pour certaines équations aux dérivées partielles (section 2.15).

Afin d'exposer d'abord les idées principales de l'intégration conditionnelle en faisant l'économie des difficultés inhérentes au traitement des ensembles à variation bornée, on a consacré la première partie de cet article à la dimension 1. On y a présenté l'intégrale introduite par R. Henstock [29] et J. Kurzweil [32]. On peut penser que les relations entre séries numériques absolument convergentes et séries numériques conditionnellement convergentes sont comparables aux relations entre l'intégrale de Lebesgue et l'intégrale de Henstock-Kurzweil. Voici quelques mots tirés de [41] : « Lebesgue a utilisé une image, qui a fait le tour du monde et a connu quelques variantes, pour illustrer la différence entre son intégrale et celle de Riemann. Dans le procédé de

Riemann, on somme les indivisibles dans l'ordre où ils se présentent dans l'intervalle d'intégration, et indépendamment de la fonction intégrée. On opère donc comme le ferait un commerçant sans méthode qui, pour compter sa recette de la journée, additionnerait un à un les billets de banque dans l'ordre où ils ont été encaissés. Par contre, le commerçant méthodique rassemble d'abord les billets de 5 euros, en nombre m_1 , avant de procéder de même pour les billets de 10 euros, en nombre m_2 , et ainsi de suite. Il obtient la valeur de sa recette en calculant $5m_1 + 10m_2 + \dots$. Les deux techniques conduisent le commerçant au même résultat, parce qu'il n'a qu'un nombre fini de billets à compter ; dans une intégrale, où il faut additionner une « infinité » d'indivisibles, la seconde méthode peut réussir là où la première a échoué. On peut compléter cette image par un troisième procédé, illustrant la définition de Kurzweil-Henstock. Au lieu de compter un par un les billets dans l'ordre où ils ont été encaissés, le commerçant méthodique les groupe, en respectant l'ordre d'encaissement, en paquets ayant approximativement une même valeur (fixée). Il lui est alors facile, par un décompte du nombre de paquets, d'obtenir la somme. »

On n'a pas cherché, en brochant ce tour d'horizon, à donner des démonstrations complètes des résultats énoncés. La plupart des « arguments » sont davantage des évocations d'idées, mais on a cependant (le plus souvent possible) renvoyé le lecteur à des ouvrages récents dans lesquels il trouvera les détails omis ici. On n'a pas non plus cherché à fournir une bibliographie exhaustive des sujets abordés.

Notations. — On désigne par \mathbb{R}^n l'espace euclidien. Pour $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ on note $\langle v_1, v_2 \rangle$ leur produit scalaire, et $|v_1| := \sqrt{\langle v_1, v_1 \rangle}$ la norme euclidienne. Étant donné un ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$, $\text{int } A$, $\text{adh } A$ et $\text{fr } A$ désignent respectivement l'intérieur, l'adhérence et la frontière topologique de A . Le *diamètre* de A est le nombre $\text{diam } A := \sup\{|x - y| : x, y \in A\}$. La boule fermée de centre $x \in \mathbb{R}^n$ et de rayon $r > 0$ est notée $\mathbf{B}(x, r)$. Si $A \subset B$ et f est une fonction définie sur B , alors sa restriction à A est notée $f \upharpoonright A$.

Si $a, b \in \mathbb{R}$ on définit $[a, b] := \mathbb{R} \cap \{x : a \leq x \leq b\}$ et $(a, b) := \mathbb{R} \cap \{x : a < x < b\}$. La signification des symboles $[a, b]$ et $(a, b]$ va de soi. Par un *intervalle* on entend un ensemble de l'un de ces quatre types. Un *intervalle multi-dimensionnel* est un ensemble de la forme $I_1 \times \dots \times I_n \subset \mathbb{R}^n$ où chaque I_i , $i = 1, \dots, n$, est un intervalle. Pour un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, on note $|I|$ sa *longueur*, qui coïncide avec son diamètre et sa mesure de Lebesgue. Si $A \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble mesurable, on désigne par $|A|$ sa mesure de Lebesgue et par χ_A sa fonction caractéristique. On pose en outre $\alpha(n) := |\mathbb{R}^n \cap \{x : |x| \leq 1\}|$.

Étant donné un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et une fonction $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, on appelle *variation de g sur $[a, b]$* , et l'on note $V_a^b g$, le nombre

$$\sup\left\{\sum_{i=1}^p |g(x_i) - g(x_{i-1})| : a = x_0 \leq \dots \leq x_p = b\right\}.$$

Si $V_a^b g < \infty$ on dit que g est à *variation bornée*, et l'on désigne par $BV([a, b])$ l'espace de ces fonctions.

Étant donné un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$, un entier $p \neq 0$ et $k = 1, 2, \dots$ ou $k = \infty$, on note $C^k(U, \mathbb{R}^p)$ l'ensemble des fonctions $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ qui sont de classe C^k . Lorsque $p = 1$ on abrège la notation par $C^k(U)$. En outre $C_c^k(U, \mathbb{R}^p)$ désigne la collection des $f \in C^k(U, \mathbb{R}^p)$ dont le *support* $U \cap \text{adh}\{x : f(x) \neq 0\}$ est un sous-ensemble compact de U . Si $f \in C^k(U, \mathbb{R}^p)$ et $x \in U$, on note $Df(x)$ la dérivée de f en x .

Une fonction $f : A \rightarrow \mathbb{R}^p$ définie sur un ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ est dite *lipschitzienne* s'il existe un nombre réel $c > 0$ tel que $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$ quels que soient $x, y \in A$. Le plus petit nombre c qui convient dans l'inégalité précédente est noté $\text{Lip } f$. Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est lipschitzienne alors il existe $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, lipschitzienne, telle que $\tilde{f} \upharpoonright A = f$. Le théorème de Rademacher affirme que toute fonction lipschitzienne $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est dérivable presque partout (voir par exemple [18, 3.1.2] ou [20, 3.1.6]).

Si $A \subset \mathbb{R}^n$ est mesurable on note $\mathcal{L}^1(A)$ (resp. $\mathcal{L}^\infty(A)$) l'espace des fonctions $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ qui sont intégrables (au sens de Lebesgue) sur A (resp. essentiellement bornées sur A). Lorsqu'une confusion sera possible, on désignera par $(\mathcal{L}) \int_A f$ l'intégrale de Lebesgue de $f \in \mathcal{L}^1(A)$. L'espace des classes d'équivalence de fonctions dans $\mathcal{L}^1(A)$ (resp. $\mathcal{L}^\infty(A)$) est noté $L^1(A)$ (resp. $L^\infty(A)$), et $\|\cdot\|_1$ (resp. $\|\cdot\|_\infty$) est la norme usuelle de cet espace.

En ce qui concerne la théorie de la mesure on se référera aux ouvrages [18, 20] où le mot mesure est utilisé pour ce qu'on entend en général par mesure extérieure. Cependant, les ensembles boréliens seront mesurables (au sens de Carathéodory) pour les mesures extérieures de cet article, de sorte qu'aucune confusion n'est possible si l'on se restreint aux fonctions et ensembles boréliens. Si μ est une mesure extérieure sur \mathbb{R}^n et $A \subset \mathbb{R}^n$, alors on définit la mesure extérieure $\mu \llcorner A$ par la formule $(\mu \llcorner A)(B) := \mu(A \cap B)$, $B \subset \mathbb{R}^n$. Pour $0 \leq m \leq n$, on désigne par \mathcal{H}^m la mesure de Hausdorff m dimensionnelle dans \mathbb{R}^n , [18, ch. 2] et [20, 2.10.2]. Dans les parties heuristiques de l'exposé il arrivera qu'on utilise la notation $\text{mes}_m(A)$ pour désigner une « mesure m dimensionnelle » sans davantage de précision, avec la convention implicite que A est une « surface m dimensionnelle ».

1. Le cas de la dimension 1

Le premier problème qui nous occupe consiste à reconstruire une fonction dérivable $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ à partir de sa dérivée F' . Dans les *bons cas* on s'attend à ce que la réponse soit donnée par la formule fondamentale

$$(2) \quad F(x) - F(0) = \int_0^x F'(\xi) d\xi,$$

quel que soit $x \in \mathbb{R}$. Pour cela il suffit de disposer d'une théorie de l'intégration pour laquelle d'une part F' soit intégrable sur chaque intervalle $[0, x]$, $x \in \mathbb{R}$, et telle que

d'autre part la fonction $x \mapsto \int_0^x F'$ ait une dérivée égale à F' . En posant $f := F'$, cette seconde condition s'exprime aussi de la façon suivante : pour chaque $x_0 \in \mathbb{R}$ et chaque $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$(3) \quad \left| \int_{x_0}^{x_0+h} f(\xi) d\xi - h f(x_0) \right| \leq \varepsilon h$$

quel que soit $h \in \mathbb{R}$ avec $|h| < \delta$. Abordant la question sous cet angle, divers obstacles surgissent immédiatement. Premièrement, les théories de l'intégration de Riemann et de Lebesgue n'ont pas la première propriété requise. Par exemple, si

$$(4) \quad F_0(x) := \begin{cases} x^2 \sin(1/x^2) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

alors F_0 est partout dérivable mais F_0' n'est pas intégrable au sens de Lebesgue au voisinage de 0. Deuxièmement, l'inégalité (3), qui est acquise dans le cas où f (c'est-à-dire F') est continue en x_0 , nécessite une attention particulière par exemple si F' n'est pas partout définie. Plus précisément, si F' est définie presque partout et intégrable au sens de Lebesgue alors (2) est valide si et seulement si F est *absolument continue* (voir par exemple [12, 6.3.7]). Pour le prouver, il faut essentiellement recourir à la théorie de la dérivation des mesures, et en particulier utiliser le théorème de recouvrement de Vitali. Nous nous proposons de présenter une intégrale pour laquelle la formule (2) est vérifiée dans une grande généralité, et d'esquisser les nouveaux détails techniques.

1.1. Le minimum d'axiomes. — Souhaitant définir une théorie de l'intégration plus générale que celle de Lebesgue, il s'agit d'abord de préciser ce que l'on entend par là. Disons que $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$. Une *théorie de l'intégration sur $[a, b]$* consiste en la donnée d'un espace vectoriel $\mathcal{J}([a, b])$ de fonctions (dites *intégrables*) $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ainsi que d'une fonctionnelle linéaire $I_{[a,b]} : \mathcal{J}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ (*l'intégrale*) tels que les conditions suivantes sont remplies :

- (A.1) $\mathcal{L}^1([a, b]) \subset \mathcal{J}([a, b])$ et pour chaque $f \in \mathcal{L}^1([a, b]) : I_{[a,b]}(f) = (\mathcal{L}) \int_a^b f$;
- (A.2) si $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur $[a, b]$ alors $F' \in \mathcal{J}([a, b])$ et $I_{[a,b]}(F') = F(b) - F(a)$.

On peut bien sûr souhaiter que I satisfasse d'autres propriétés, par exemple de « continuité », on y reviendra. En général on demandera également que la restriction de fonctions intégrables à certains sous-ensembles de $[a, b]$ soit encore intégrable, que l'intégrale soit additive et que l'intégrale indéfinie soit continue. Par exemple :

- (A.3) pour chaque $x \in (a, b)$ et chaque $f \in \mathcal{J}([a, b])$ on a : $f \upharpoonright [a, x] \in \mathcal{J}([a, x])$, $f \upharpoonright [x, b] \in \mathcal{J}([x, b])$ et $I_{[a,b]}(f) = I_{[a,x]}(f \upharpoonright [a, x]) + I_{[x,b]}(f \upharpoonright [x, b])$;
- (A.4) pour chaque $f \in \mathcal{J}([a, b])$ on a : $f \chi_{[a,x]} \in \mathcal{J}([a, b])$ quel que soit $x \in [a, b]$, et la fonction $x \mapsto I(f \chi_{[a,x]})$ est continue.