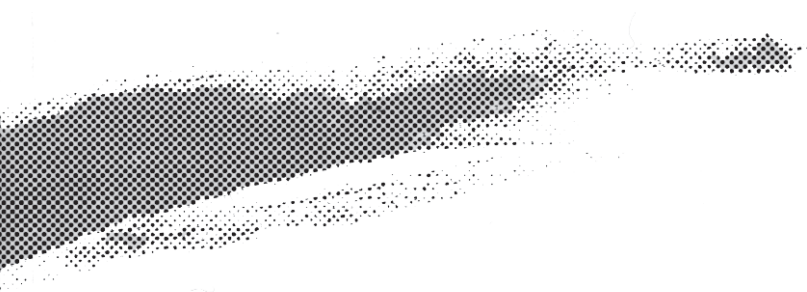


Séminaires & Congrès

C O L L E C T I O N S M F



**GEOMETRIC AND DIFFERENTIAL
GALOIS THEORIES**

Numéro 27 D. Bertrand, Ph. Boalch, J.-M. Couveignes, P. Dèbes, eds.

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

Hindustan Book Agency
O-131, The Shopping Mall
Arjun Marg, DLF Phase 1
Gurgaon 122002, Haryana
Inde

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 40 € (\$60)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat

Séminaires et Congrès
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2013

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

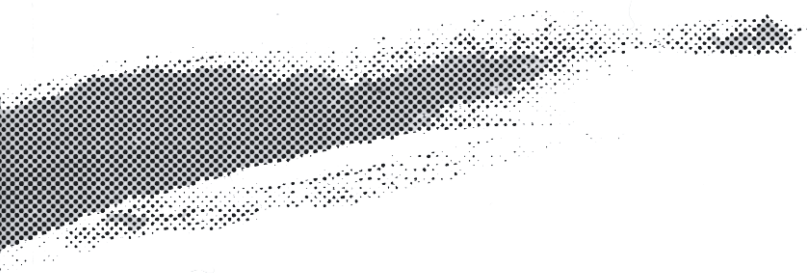
ISSN 1285-2783

ISBN 978-2-85629-364-5

Directeur de la publication : Aline BONAMI

Séminaires & Congrès

C O L L E C T I O N S M F



GEOMETRIC AND DIFFERENTIAL GALOIS THEORIES

Numéro 27 D. Bertrand, Ph. Boalch, J.-M. Couveignes, P. Dèbes, eds.

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

D. Bertrand

Institut de Mathématiques - Université Pierre et Marie Curie, Case 247
4, Place Jussieu
75252 Paris Cedex 05 - France
bertrand@math.jussieu.fr

Ph. Boalch

École normale supérieure et CNRS - Dépt. de mathématiques et applications (DMA)
45 rue d'Ulm
75005 Paris - France
boalch@dma.ens.fr

Jean-Marc Couveignes

Institut de Mathématiques de Bordeaux - Université Bordeaux I
351, cours de la Libération
33405 Talence cedex - France
Jean-Marc.Couveignes@math.u-bordeaux1.fr

Pierre Dèbes

Laboratoire Paul Painlevé - U.F.R. de Mathématiques - Université Lille 1
59655 Villeneuve d'Ascq cedex - France
Pierre.Debes@univ-lille1.fr

Classification mathématique par sujets (2000). — 11F32, 11S20, 12E30, 12F10, 12F12, 12F15, 12H05, 12H10, 12H20, 12H25, 13B05, 14C25, 14D20, 14D22, 14F20, 14F42, 14G20, 14G22, 14H30, 14K15, 16T10, 20D06, 20G40, 32G20, 32G34, 34M15, 34M55.

Mots-cléfs. — Catégorie tannakienne semisimple, cohomologies de Weil, conjecture d'Abhyankar, conjecture de la torsion, connexion logarithmique, cycles motiviques, déformations isomonodromiques, différentielles algébriques, droite projective, ensemble de Higgs, équations algébriques en caractéristique finie, équations algébriques en caractéristique nulle, équations de Painlevé, équations différentielles, espace de modules pour les connexions linéaires, extensions inséparables, géométrie anabélienne, géométrie de Berkovich, groupe fondamental, groupes de monodromie, groupes fondamentaux p-adiques, involution de Lefschetz, matrices de Stokes, modules artiniens, modules de Frobenius, Painlevé VI, représentations galoisiennes, revêtements galoisiens, schémas en groupes finis, singularité apparente, singularités irrégulières, théorie de Galois différentielle, théorie de Galois, théorie des corps amples, théorie des motifs, variétés abéliennes, variétés jacobiniennes.

GEOMETRIC AND DIFFERENTIAL GALOIS THEORIES

D. Bertrand, Ph. Boalch, J.-M. Couveignes, P. Dèbes, eds.

Abstract. — On March 29-April 2, 2010, a meeting was organized at the Luminy CIRM (France) on geometric and differential Galois theories, witnessing the close ties these theories have woven in recent years. The present volume collects the Proceedings of this meeting. Although it may be viewed as a continuation of the one held 6 years earlier on arithmetic and differential Galois groups (see *Séminaires & Congrès*, vol. 13), several new and promising themes have appeared. The articles gathered here cover the following topics: moduli spaces of connexions, differential equations and coverings in finite characteristic, liftings, monodromy groups in their various guises (tempered fundamental group, motivic groups, generalized difference Galois groups), and arithmetic applications.

Résumé. (Théories de Galois géométrique et différentielle). — Ce volume constitue les actes du colloque sur les théories de Galois géométrique et différentielle qui s'est déroulé au CIRM de Luminy (France) du 29 Mars au 2 Avril 2010. À la suite d'un premier colloque tenu en 2004 sur ces questions (voir *Séminaires & Congrès*, vol. 13), les liens entre les deux théories se sont consolidés, tout en donnant naissance à de nouveaux thèmes de recherche. Les articles rassemblés dans le présent volume abordent les sujets suivants : espaces de modules de connexions, équations différentielles et revêtements en caractéristique finie, relèvements, groupes de monodromie sous des aspects variés (groupe fondamental tempéré, groupes motiviques, groupes de Galois aux différences généralisés), et applications arithmétiques.

TABLE OF CONTENTS

Abstracts	ix
Résumés des articles	xiii
Préface	xvii
LIOR BARY-SOROKER AND FEHM ARNO — <i>Open Problems in the Theory of</i> <i>Ample Fields</i>	1
1. Introduction	1
2. Background	2
3. Algebraic fields	4
4. Galois theory of ample fields	5
5. Virtually ample fields	6
6. Radically closed fields	7
7. The conjecture of Dèbes and Deschamps	8
Acknowledgements	9
References	9
ALEXANDRU BUIUM — <i>Galois groups arising from arithmetic étale equations</i> .	13
1. Introduction	13
2. Fermat quotients	15
3. Galois groups	16
4. δ -rational functions	17
5. δ -modular forms	19
6. Conclusion	23
References	23
ANNA CADORET — <i>Motivated cycles under specialization</i>	25
1. Introduction	26
2. The category of pure motives	28
3. Kunnetth type and Lefschetz type conjectures	37
4. André’s theory of motivated cycles	41
5. Variation of motivated motivic Galois groups	49

References	54
ANNA CADORET AND AKIO TAMAGAWA — <i>Note on torsion conjecture</i>	57
1. Introduction	57
2. First approach — Genus computation	60
3. Second approach — Universal curve	62
4. End of the proof	65
References	67
FLORIAN HEIDERICH — <i>Introduction to the Galois theory of Artinian simple module algebras</i>	69
Introduction	70
Part I. Differential and difference Galois theories	72
1. Differential Galois theory	72
2. Difference Galois theory	76
Part II. Unified Galois theory	78
3. Module algebras	78
4. Picard-Vessiot extensions of Artinian simple module algebras	84
5. Generalized Galois theory of Artinian simple module algebras	86
6. Comparison of the general theory with Picard-Vessiot theory	90
References	92
EMMANUEL LEPAGE — <i>Tempered fundamental group</i>	95
Introduction	95
1. Tempered fundamental group	98
2. p -adic version of Grothendieck-Teichmüller group	104
3. Decomposition subgroups and compact subgroups	106
References	115
FRANK LORAY, MASA-HIKO SAITO AND CARLOS SIMPSON — <i>Foliations on the moduli space of connections</i>	117
1. Introduction	117
2. Moduli stacks of parabolic logarithmic λ -connections	120
3. Parametrization of parabolic structures	125
4. The Higgs limit construction	132
5. The unstable zones	137
6. The stable zone	141
7. Local systems on root stacks	145
8. Transversality of the fibrations	148
9. Okamoto symmetries	152
10. Middle convolution interpretation	162
References	167
B.H. MATZAT — <i>Monodromy of Frobenius Modules</i>	171

Introduction	171
1. Monodromy of Ordinary Frobenius Modules	172
2. Monodromy of Q -adic Frobenius Modules	175
3. Application to étale Modules	178
References	182
ANDREAS MAURISCHAT — <i>On the finite inverse problem in iterative étale Galois theory</i>	
1. Introduction	185
2. Basic notation	186
3. Purely inseparable PV-extensions	189
4. Finite separable PV-extensions	190
5. Finite PV-extensions	192
References	193
ANDREW OBUS — <i>Toward Abhyankar’s Inertia Conjecture For $PSL_2(\ell)$</i>	
1. Introduction	195
Acknowledgments	197
2. Preliminaries	197
3. A one-point cover	200
4. Higher ramification filtrations	202
References	205
MARIUS VAN DER PUT — <i>Families of linear étale equations and the Painlevé equations</i>	
Introduction	207
1. The family $(-, -, 5/2)$	210
2. The family $(1/2, -, 1/2)$	217
References	223
MICHAEL WIBMER — <i>On the Galois theory of strongly normal étale and difference extensions</i>	
Introduction	225
1. σ versus δ	227
2. Strongly normal extensions	232
3. The fundamental isomorphism and the Galois group scheme	237
4. Comparison with the inversive Galois group	241
References	242
Annexe A. Programme	245
Annexe B. Liste des participants	247

ABSTRACTS

Open Problems in the Theory of Ample Fields

LIOR BARY-SOROKER AND FEHM ARNO 1

Fifteen years after their discovery, ample fields now stand at the center of research in contemporary Galois theory and attract more and more attention also from other areas of mathematics. This survey gives an introduction to the theory of ample fields and discusses open problems.

Galois groups arising from arithmetic étale equations

ALEXANDRU BUIUM 13

In this note we show (by interpreting results both old and new) that various Galois theoretic statements about algebraic equations in characteristic p , that are “non-liftable” to statements about algebraic equations in characteristic zero, can nevertheless be lifted to statements about “arithmetic étale equations” in characteristic zero.

Motivated cycles under specialization

ANNA CADORET 25

This paper is essentially a survey of André’s theory of pure motivated motives with an emphasis on specialization theory in characteristic zero. We review first the classical construction of pure motives and then turn to pure motivated motives whose construction is modeled upon the one of pure homological motives, replacing homological cycles by motivated cycles. Basically, motivated cycles are obtained from homological cycles by adjoining formally the Lefschetz involution so that the so-called standard conjectures become true in the category of pure motivated motives; in particular, this category is a semisimple Tannakian category naturally equipped with fibre functors coming from Weil cohomologies. The last section is devoted to the ℓ -adic version of André’s specialization theorem for motivated cycles, which asserts that, given a family of motivated motives M over a scheme S of finite type over a finitely generated field k of characteristic 0, the locus of all $s \in S(k)$ where the motivated motivic Galois group associated with $M_{\bar{s}}$ degenerates is thin in $S(k)$. When S is a curve, we improve André’s

statement by resorting to a uniform open image theorem for ℓ -adic cohomology proved by A. Tamagawa and the author. We conclude by some applications of this specialization theorem.

Note on torsion conjecture

ANNA CADORET ET AKIO TAMAGAWA 57

In this note, we give an elementary and effective proof of the fact that the torsion conjecture for jacobian varieties implies the torsion conjecture for abelian varieties.

Introduction to the Galois theory of Artinian simple module algebras

FLORIAN HEIDERICH 69

We give an introduction to a Galois theory of Artinian simple module algebras. To this end, we first recall the Picard-Vessiot theories of étale and difference equations, Umemura's étale Galois theory and Morikawa-Umemura's difference Galois theory. Then we sketch the main ideas of Amano and Masuoka's unification of the Picard-Vessiot theories of étale and difference extensions. We show how the étale Galois theory of Umemura and the difference Galois theory of Morikawa-Umemura can be unified using Artinian simple module algebras in lieu of étale or difference fields, respectively, and remove the restriction to fields of characteristic 0. Finally, we compare this unified theory to the Picard-Vessiot theory of Amano and Masuoka in the case of Picard-Vessiot extensions of Artinian simple module algebras.

Tempered fundamental group

EMMANUEL LEPAGE 95

This paper is a survey of anabelian aspects of the tempered fundamental group of nonarchimedean analytic spaces. This tempered fundamental group classifies analytic Étale coverings that become topological coverings for Berkovich topology after pullback by some finite étale covering. This article will focus on two aspects: a nonarchimedean analog of Grothendieck-Teichmüller theory and a geometric interpretation of compact subgroups of the tempered fundamental group and of a prime-to- p version of the tempered fundamental group.

Foliations on the moduli space of connections

FRANK LORAY, MASA-HIKO SAITO ET CARLOS SIMPSON 117

We look at natural foliations on the Painlevé VI moduli space of regular connections of rank 2 on $\mathbb{P}^1 - \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$. These foliations are fibrations, and are interpreted in terms of the nonabelian Hodge filtration, giving a proof of the nonabelian Hodge foliation conjecture in this case. Two basic kinds of fibrations arise: from apparent singularities, and from quasiparabolic bundles. We show that these are transverse. Okamoto’s additional symmetry, which may be seen as Katz’s middle convolution, exchanges the quasiparabolic and apparent-singularity foliations.

Monodromy of Frobenius Modules

B.H. MATZAT 171

Monodromy groups of Frobenius modules and étale modules with Frobenius structure over p -adic and t -adic rings of Laurent series are studied. Using Galois representations in many cases, at least the connected inverse problem could be solved affirmatively.

On the finite inverse problem in iterative étale Galois theory

ANDREAS MAURISCHAT 185

In positive characteristic, nearly all Picard-Vessiot extensions are inseparable over some intermediate iterative étale extensions. In the Galois correspondence, these intermediate fields correspond to nonreduced subgroup schemes of the Galois group scheme. Moreover, the Galois group scheme itself may be nonreduced, or even infinitesimal. In this article, we investigate which finite group schemes occur as iterative étale Galois group schemes over a given ID-field. For a large class of ID-fields, we give a description of all occurring finite group schemes.

Toward Abhyankar’s Inertia Conjecture For $PSL_2(\ell)$

ANDREW OBUS 195

For $\ell \neq p$ odd primes, we examine $PSL_2(\ell)$ -covers of the projective line branched at one point over an algebraically closed field k of characteristic p , where $PSL_2(\ell)$ has order divisible by p . We show that such covers can be realized with a large variety of inertia groups. Furthermore, for each inertia group realized, we can realize all “sufficiently large” higher ramification filtrations.

Families of linear étale equations and the Painlevé equations

MARIUS VAN DER PUT 207

After explaining the problem and the results in a short survey of joint work with M-H. Saito and work by K. Okamoto on the geometry of Painlevé equations, two special families of linear étale equations, related to the equations PI, PIII(D_8), are studied in detail. Fine moduli spaces are constructed and identified with Okamoto–Painlevé spaces. The universal property of the moduli spaces implies the Painlevé property for these equations.

On the Galois theory of strongly normal étale and difference extensions

MICHAEL WIBMER 225

The aim of this note is to give a short overview of J. Kovacic’s scheme-theoretic approach ([13], [14]) to the Galois theory of strongly normal étale extensions and to highlight the main difficulties and differences one has to overcome to obtain a similar theory for difference equations.

RÉSUMÉS DES ARTICLES

Problèmes ouverts de la théorie des corps amples

LIOR BARY-SOROKER ET FEHM ARNO 1

Quinze ans après leur découverte, les corps amples se situent maintenant au cœur de la recherche contemporaine en théorie de Galois et attirent de plus en plus l'attention de la part d'autres branches des mathématiques. Ce travail présente une introduction à la théorie des corps amples et traite de quelques problèmes ouverts.

Groupes de Galois issus d'équations différentielles arithmétiques

ALEXANDRU BUIUM 13

Dans cette note, on démontre, en réinterprétant des résultats tant anciens que nouveaux, que divers énoncés de nature galoisienne sur les équations algébriques en caractéristique finie, qui ne peuvent être relevés en des énoncés sur des équations algébriques en caractéristique nulle, peuvent néanmoins l'être en des énoncés portant sur des «équations différentielles algébriques» en caractéristique nulle.

Spécialisation des cycles motivés

ANNA CADORET 25

Cet article est une introduction à la théorie des motifs motivés purs développée par André. Nous nous intéressons plus particulièrement au problème de la spécialisation de ces motifs en caractéristique 0. Nous commençons par rappeler la construction classique des motifs purs puis nous présentons la construction des motifs purs motivés comme une variante de la construction des motifs purs homologiques où les cycles homologiques sont remplacés par les cycles motivés. En gros, les cycles motivés sont obtenus en adjoignant formellement l'involution de Lefschetz aux cycles homologiques de sorte que les conjectures dites standard deviennent vraies dans la catégorie des motifs purs motivés ; en particulier, cette catégorie est une catégorie tannakienne semisimple naturellement munie de foncteurs fibres provenant des cohomologies de Weil considérées. La dernière partie de cet article est consacrée à la version ℓ -adique du théorème d'André sur la spécialisation des cycles motivés. Celui-ci peut s'énoncer comme suit. Soit k un