Le vrai, le beau et l'utile en mathématiques

Yves Meyer

Ancien élève du lycée Carnot de Tunis

Je parlerai de mon enfance à Tunis et de ma passion pour la géométrie.

Ensuite je dirai le rôle immense que joue la géométrie dans la physique ancienne et contemporaine.

Je choisirai, comme illustration, l'exemple des quasi-cristaux.

Enfin je parlerai de l'art de l'Islam au quinzième siècle.

C'est ainsi que je retournerai au Tunis de mon enfance.

Le Tunis de mon enfance: la baie de Tunis et le Bou Kornine, petite montagne de 450 mètres qui domine la ville.

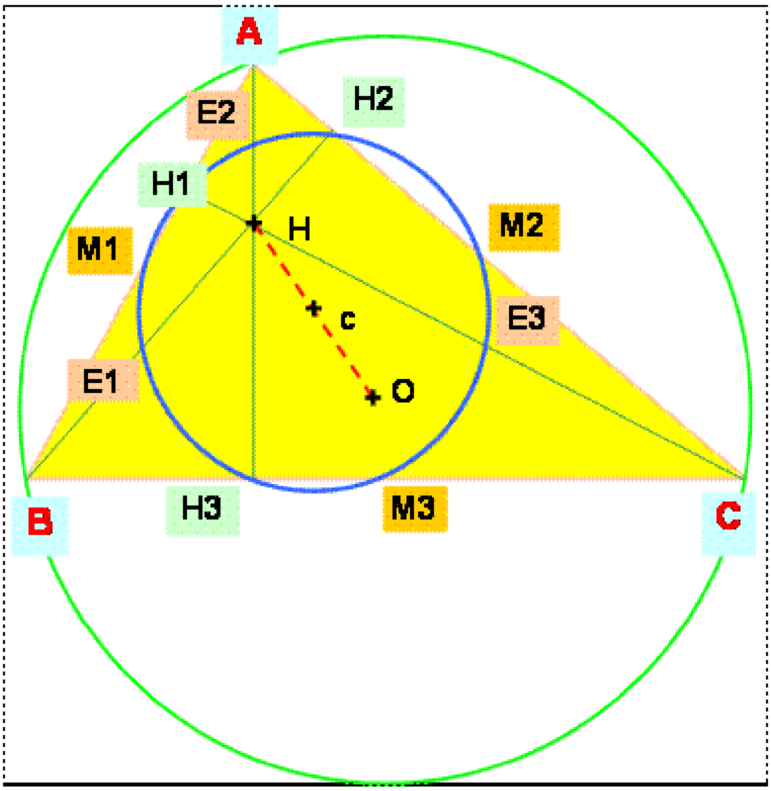
Le lycée Carnot de Tunis.

Le linguiste Claude Hagège, professeur au Collège de France, Albert Memmi, Alain Bensoussan, Jean-Michel Ghidaglia et tant d'autres y ont été élèves.

Cette mosaïque se trouve au musée du Bardo, à quelques kilomètres de l'endroit où je vivais à Tunis. Elle représente Virgile écrivant l'Enéide.

La beauté était partout présente en Tunisie. Au lycée j'étudiais le latin et le grec. Virgile et Platon m'étaient familiers.

En terminale (1955-1956) je traçais cette belle figure, le cercle des neuf points d'Euler, avant de démontrer que ces points sont effectivement sur un même cercle.



Dans le cercle des neuf points, la beauté et la vérité se rejoignent. La beauté est renforcée par la rigueur d'une preuve.

«Le beau, c'est l'intelligence rendue sensible.»

(Joseph Joubert).

Platon et Abdus Salam.

Euclide termina son oeuvre *Les Eléments* en prouvant qu'il existe exactement 5 polyèdres convexes réguliers : le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre.

Les grecs ont rattaché les cinq solides réguliers aux grandes entités qui façonnaient le monde : le feu est associé au tétraèdre, l'air à l'octaèdre, la terre au cube, l'univers au dodécaèdre et l'eau à l'icosaèdre.

La théorie (fantaisiste) de Platon préfigure les travaux sur les particules élémentaires qui sont, grâce à la mécanique quantique, associées à des représentations de groupes.

Le physicien pakistanais Abdus Salam prédit l'existence des particules Z et W en utilisant la théorie des représentations de groupes (cette théorie généralise les solides de Platon). Il obtint en 1979 le prix Nobel de physique.

J'avais 15 ans quand la guerre d'Algérie (1954-1962) a commencé. Elle devenait chaque jour plus cruelle et plus ignominieuse.

Censure et mensonges m'ont obligé à rechercher la vérité par moi-même.

Ne plus croire en personne était une forme de révolte, d'insoumission.

Quand je faisais des mathématiques, j'étais le seul juge de la vérité.

Je pouvais prouver que le maître se trompe.

L'argument d'autorité ne fonctionne pas en mathématiques.

J'ai recherché la vérité et la beauté dans les mathématiques. D'abord comme élève, ensuite comme chercheur.

Dans la première partie de mon travail de chercheur, j'ai essayé de créer de la beauté, comme le ferait un artiste, un peintre.

C'est pourquoi mon premier amour fut la théorie des nombres, l'étude des nombres de Pisot et de Salem. Un nombre réel $\theta > 1$ est un nombre de Pisot si θ est un entier algébrique dont tous les conjugués (autres que θ lui-même) ont un module inférieur à 1.

Un nombre de Salem est défini par la même condition, à ceci près que certains conjugués peuvent avoir un module égal à 1.

Donc un nombre de Pisot est défini comme la solution $\theta > 1$ d'une équation $\theta^n + a_1\theta^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ où les a_j sont des entiers (de signes arbitraires) et où les n-1 conjugués de θ vérifient: $|\theta_2| < 1, \ldots, |\theta_n| < 1$.

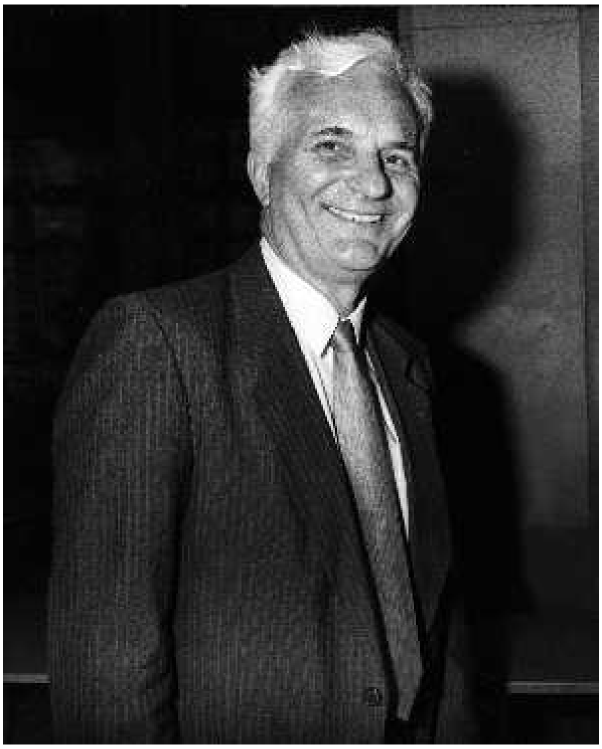
Par exemple le nombre d'or est un nombre de Pisot.

Un nombre de Salem est défini de façon identique, mais l'une au moins des inégalités $|\theta_2| < 1, \ldots, |\theta_n| < 1$ est remplacée par une égalité.

L'utilité de ce que je faisais ne m'est apparue que beaucoup plus tard, accidentellement, dans trois domaines différents (théorie du contrôle, ondelettes et traitement du signal, quasi-cristaux).

Je vais vous parler des quasi-cristaux.

Mais je dois d'abord rendre hommage à
Jacques-Louis Lions.



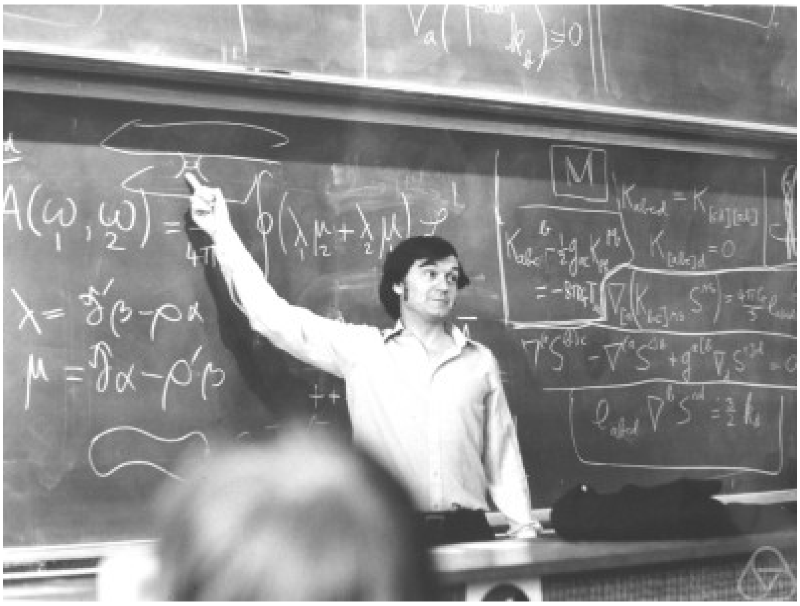
En 1983, Jacques-Louis Lions m'a demandé de l'aider à résoudre un problème sur la contrôlabilité des structures spatiales flexibles.

J'ai relevé ce défi et cela fut mon premier pas vers les applications des mathématiques.
J'ai alors compris que mes recherches pouvaient être utiles.

Quelques mois plus tard, je m'engageais dans l'aventure du traitement du signal et de l'image par les ondelettes.

Dans l'histoire des quasi-cristaux que je vais vous raconter, l'utilité de ce que j'avais fait n'est apparue qu'après coup. En un sens mon travail, qui était potentiellement très utile, n'a pas été à l'origine des découvertes de Roger Penrose et de Denis Gratias.

<u>Roger Penrose</u>.



Roger Penrose, né en 1931, est un mathématicien et physicien anglais, célèbre pour la prédiction de l'existence des trous noirs, grâce à l'étude des équations aux dérivées partielles de la relativité généralisée.

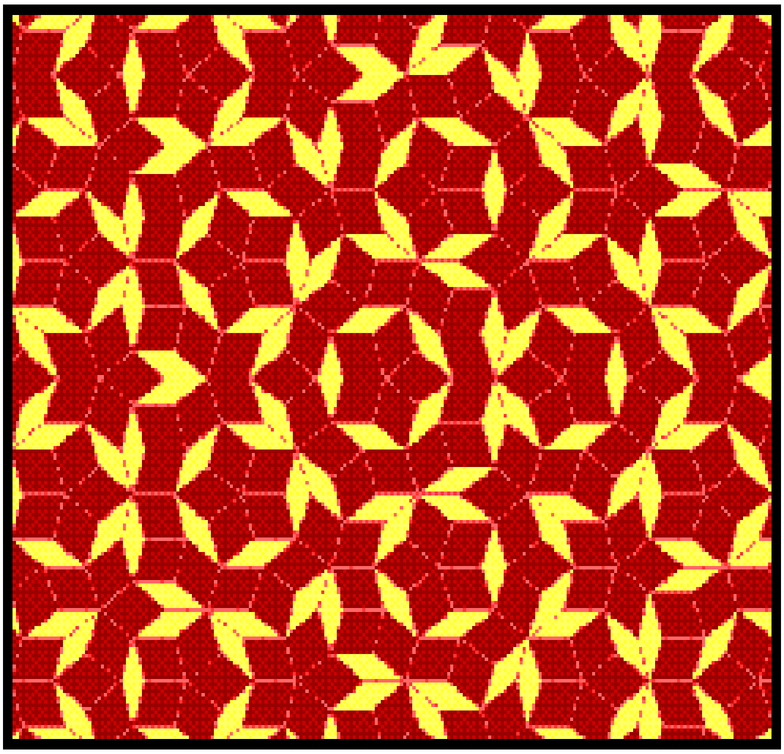
Le livre de la nature est écrit dans le langage mathématique (Galilée).

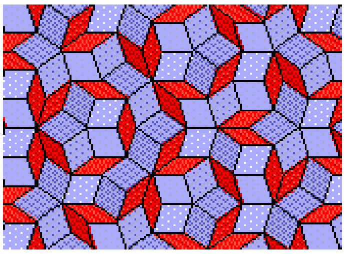
L'aventure des quasi-cristaux a commencé pour moi en 1969. Mes quasi-cristaux n'étaient pas des mosaïques, mais des ensembles de points, ce qui correspond à ce dont on a besoin en chimie.

Je reviendrai à mes quasi-cristaux et commence par les quasi-cristaux vus comme des mosaïques. Ils ont été découverts par Roger Penrose.

Nous verrons que mes quasi-cristaux définissent toujours des pavages, mais que certains pavages du plan ne sont pas associés à des quasi-cristaux.

Les quasi-cristaux de Penrose (1976) sont des mosaïques. Certaines des figures qui suivent sont les mêmes: à vous de le découvrir.





Voici les règles du jeu de ce puzzle:

les pièces dont Penrose se sert sont deux losanges A et B (le même jeu peut de jouer avec d'autres formes géométriques, 5 triangles, par exemple).

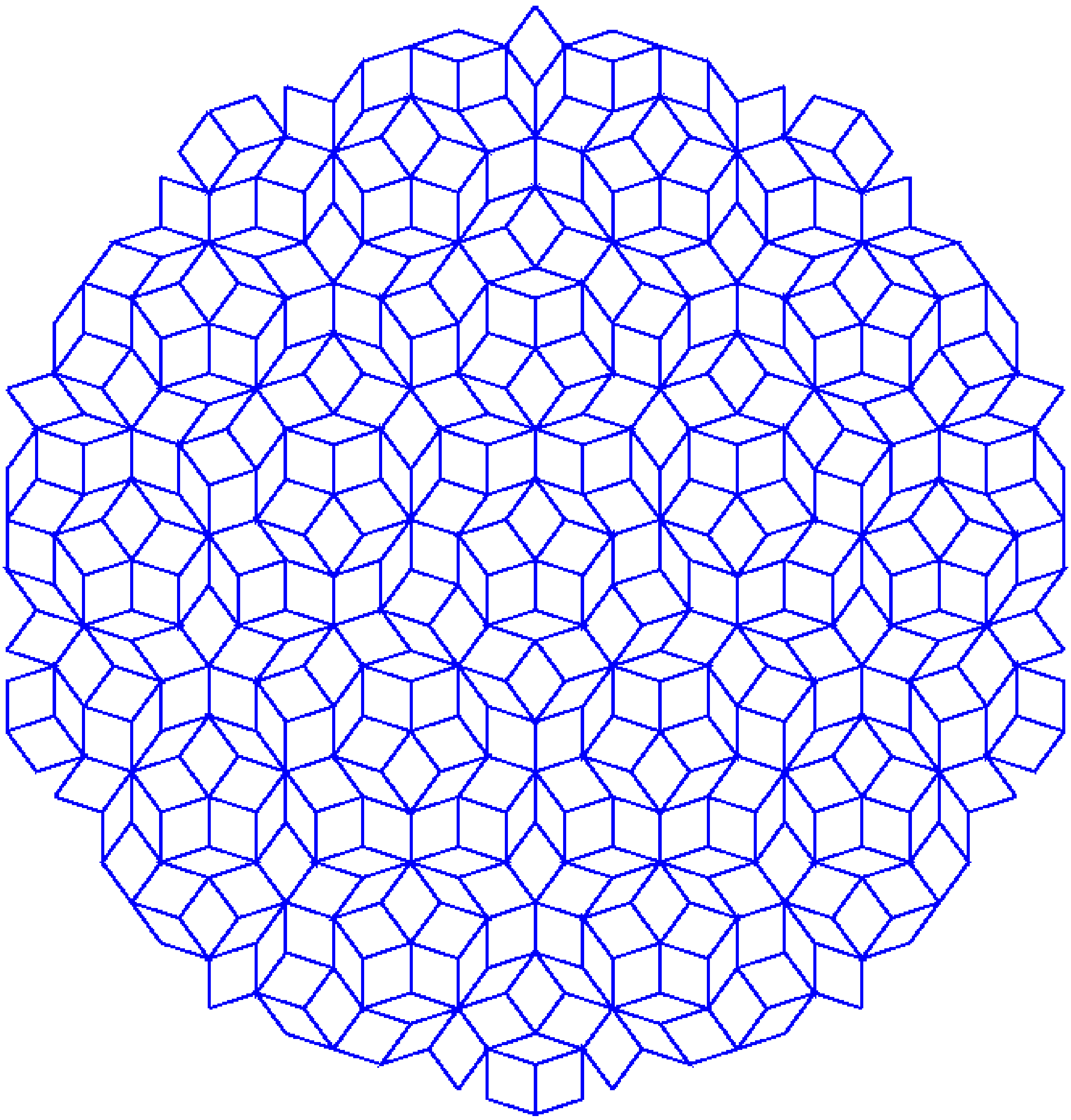
Penrose dispose d'un nombre infini de losanges tous identiques à A et de même pour B. Il doit alors paver le plan infini des mathématiciens à l'aide de ces losanges.

On pense à des mosaïques où les petites pierres s'ajustent exactement. On pense aussi aux précieuses marqueteries des ébénistes du dix-huitième siècle.

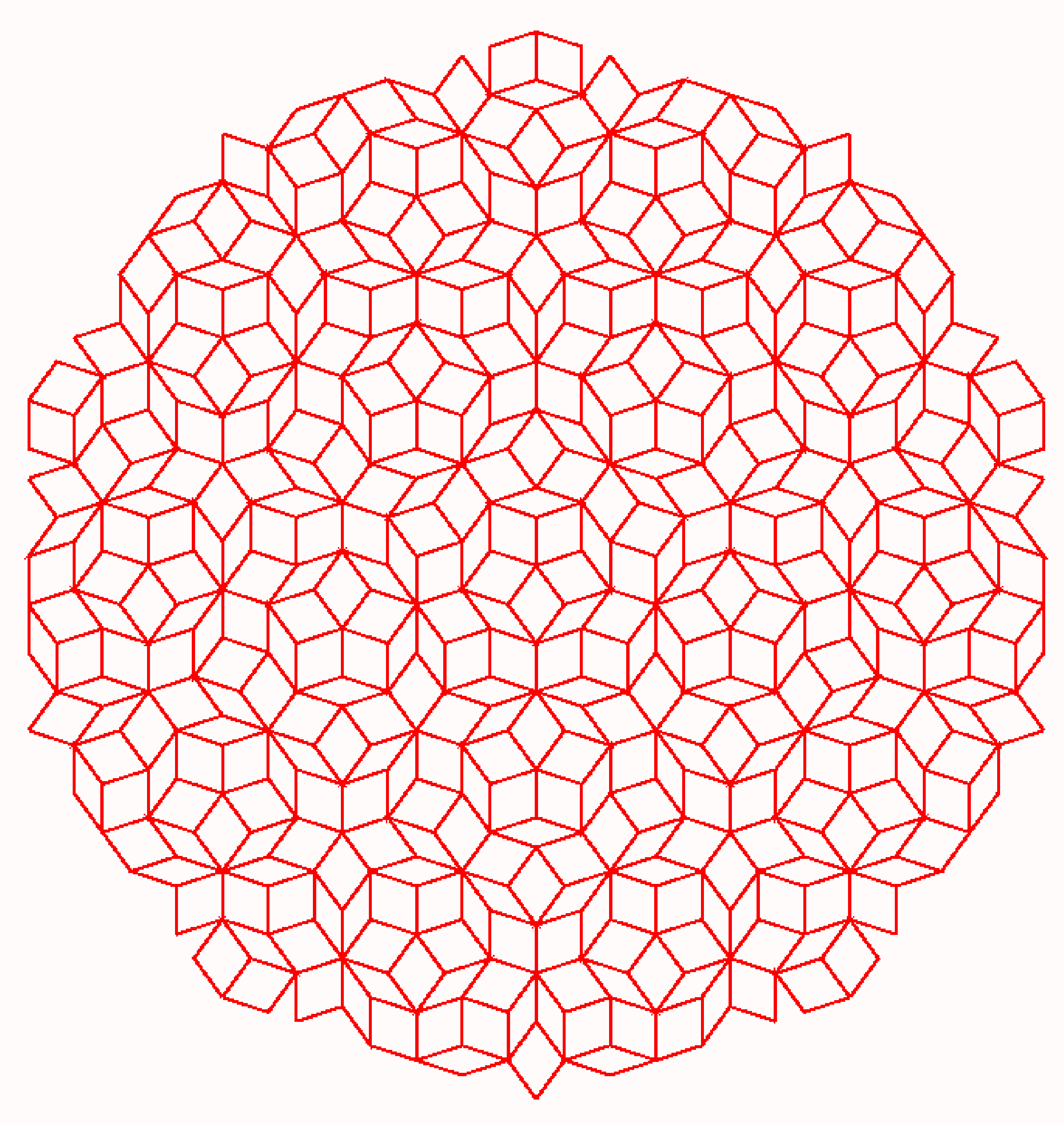
Penrose veut que la figure obtenue soit invariante par rotation d'angle $2\pi/5$. Penrose résolut ce problème en 1976.

Il nous dit qu'il s'est intéressé à ce problème en hommage à Kepler et qu'il s'est ensuite réjoui de créer une belle figure.

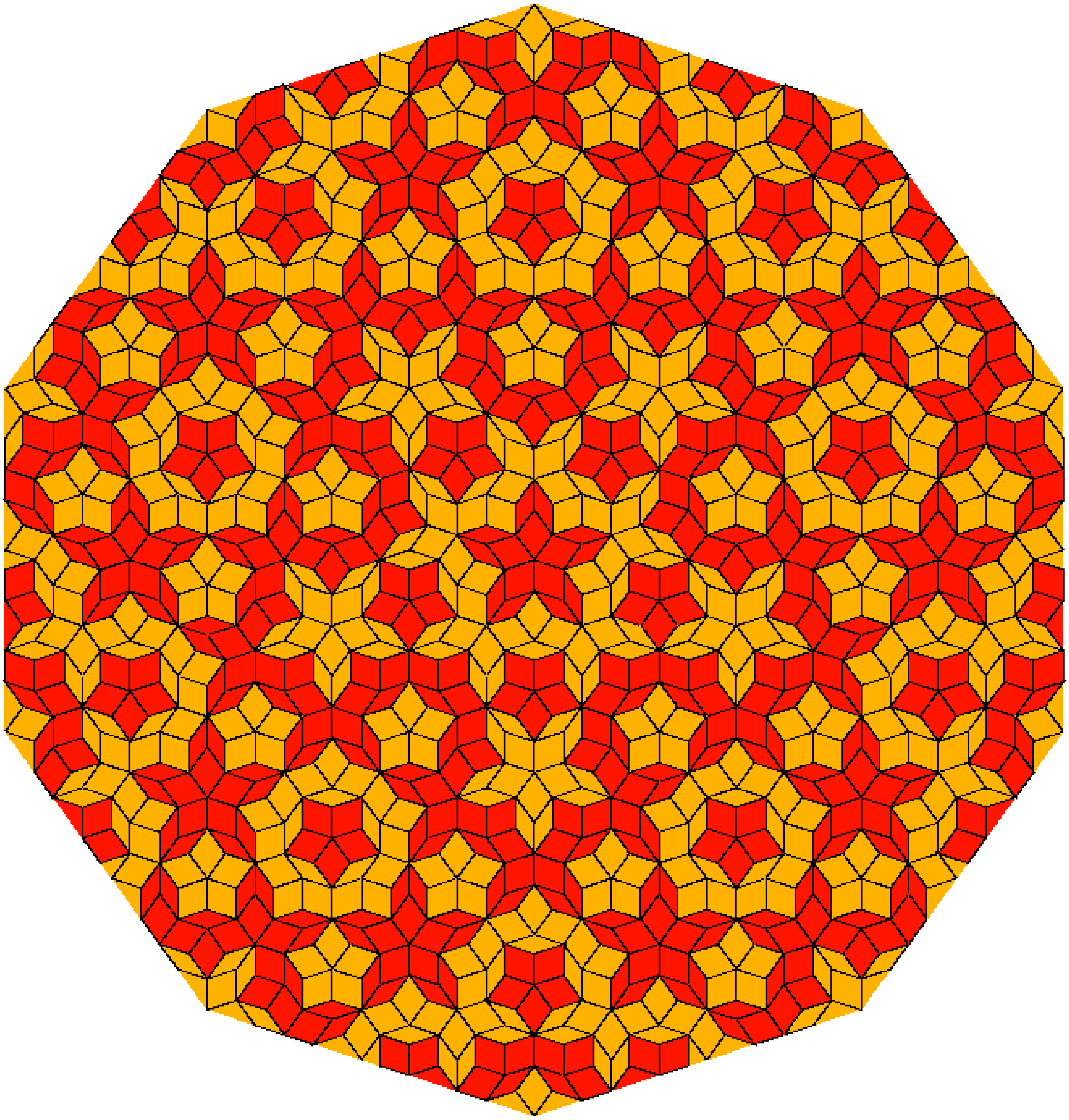
Voici un quasi-cristal. Il s'agit de recouvrir exactement le plan infini des mathématiciens en utilisant seulement deux types de losanges. On veut aussi que la figure soit invariante par rotation de $2\pi/5$.



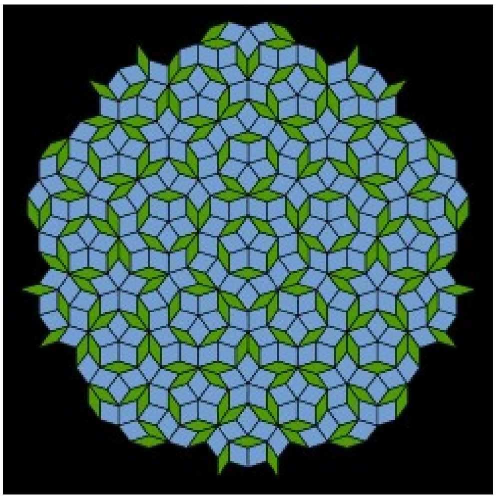
Est-ce le même que le précédent? Regardez bien!



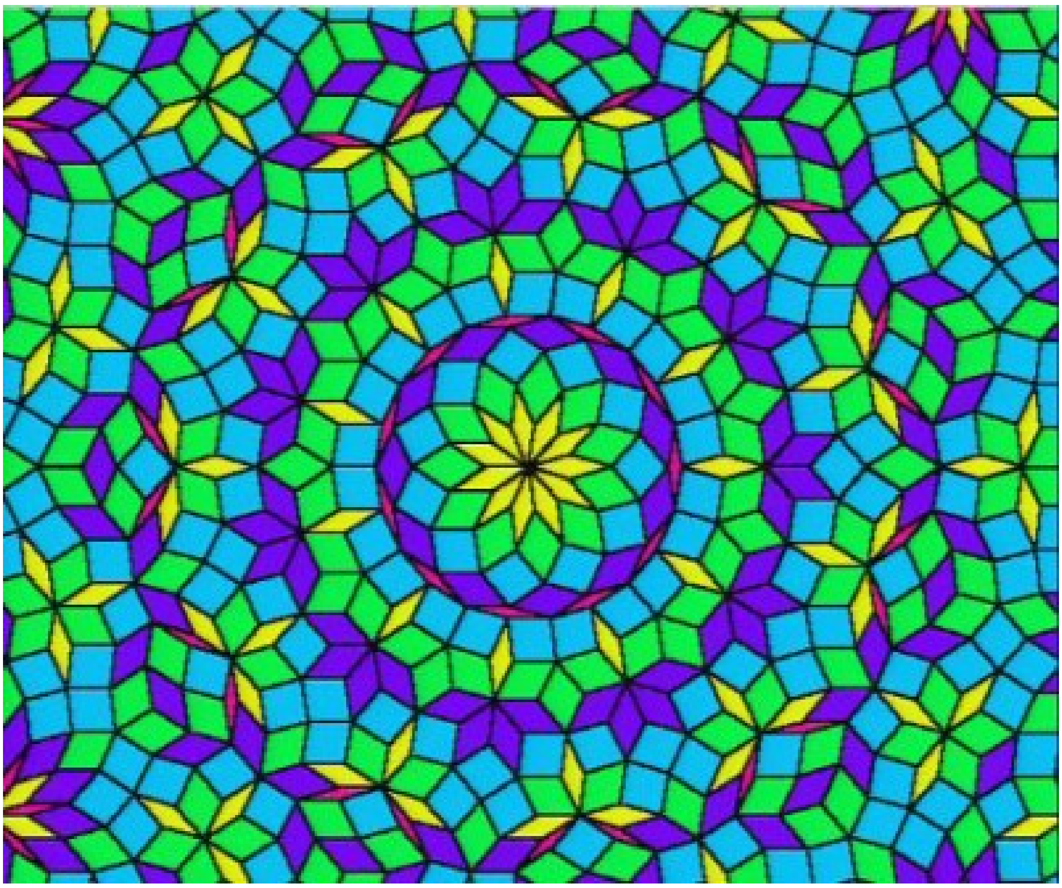
Que pensez-vous de celui-ci?



Et celui-la?



Un exemple avec cinq types de pièces:



Les pavages de Penrose sont des figures géométriques paradoxales et très difficiles à découvrir.

L’existence de ces pavages se démontre par un raisonnement et non par un calcul sur ordinateur.

Un morceau, aussi étendu soit-il, d’un pavage de Penrose ne permet pas de continuer le dessin, sauf si l’on ne connaît les règles de construction.

Les quasi-cristaux et la chimie des matériaux.

Huit ans après le travail de Penrose (et quinze ans après le mien), les quasi-cristaux ont été découverts dans la Nature. Les dispositions paradoxales des atomes dans certains alliages (aluminium-cuivre-fer) suivent les règles établies par Penrose dans la construction des pavages.

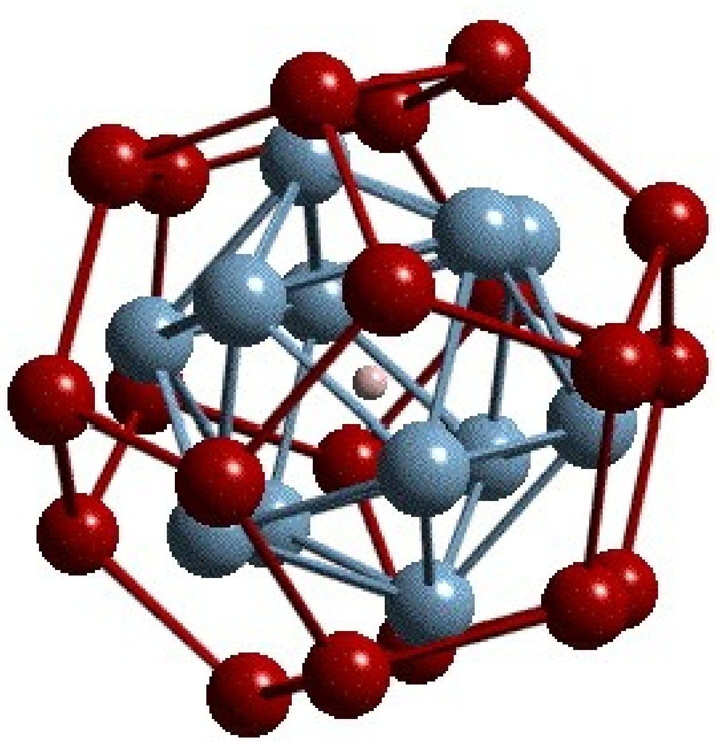
Les atomes dans ces alliages sont un «Meyer set». Les pavages ne jouent plus aucun rôle. Enfin tout se passe en dimension 3.

La référence est un article de D. Shechtman, I. Blech, D. Gratias et J. W. Cahn, intitulé *Metallic Phase with Long-Range Orientational Order and No Translational Symmetry*, Phys. Rev. Lett. 53, 1951-1953 (1984).

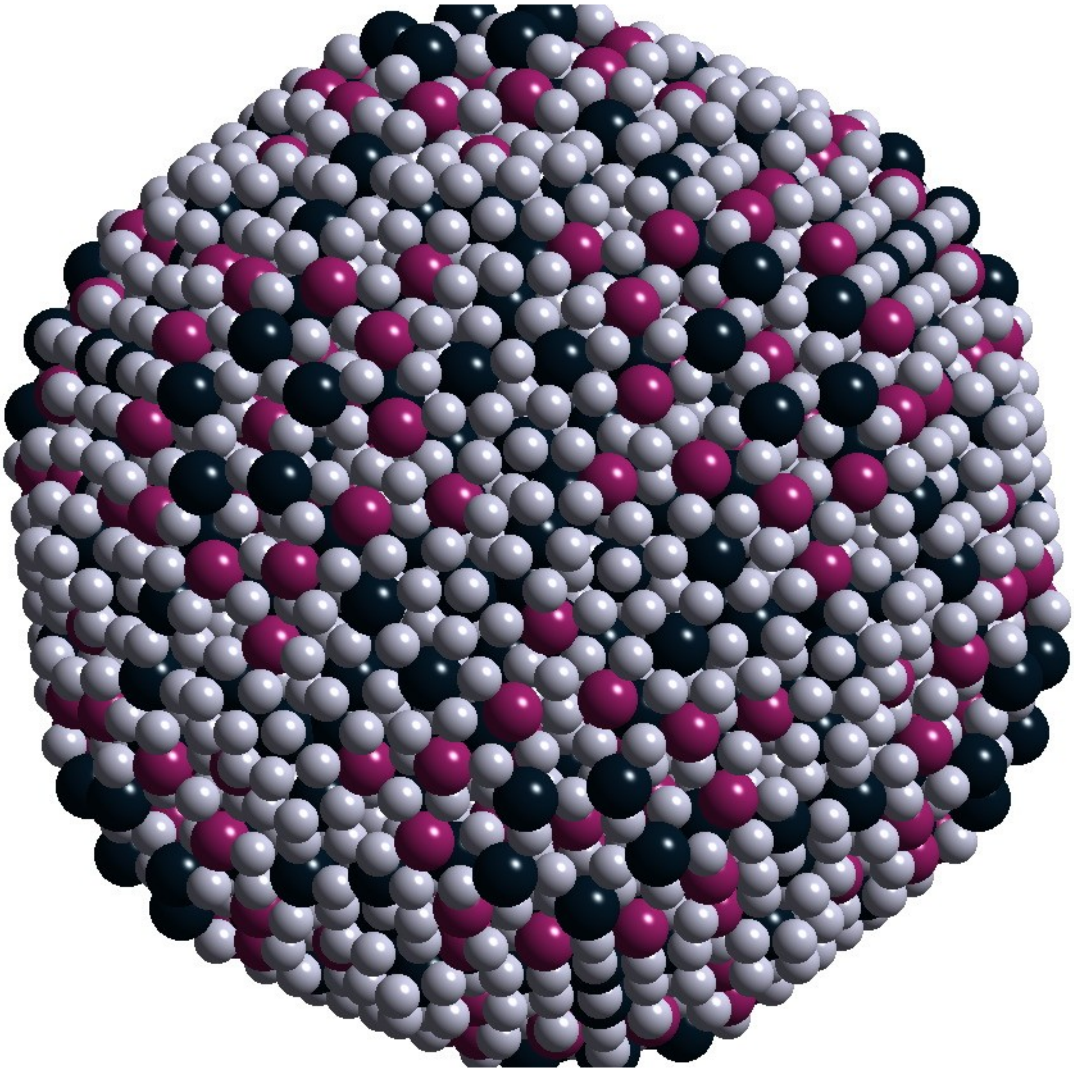
Gratias et ses collaborateurs n'ont pas été influencés par la lecture du travail de Penrose. Ils ne le connaissaient pas; leur découverte rencontra donc une vive opposition, car elle semblait violer les lois de la cristallographie.

Ces lois interdisent, en effet, l’invariance par rotation d’angle 2π/5 que D. Gratias et ses collaborateurs observaient dans les images de diffraction des quasi-cristaux.

Voici des schémas de quasi-cristaux.



Ceci est l'un des deux amas de base du modèle KG (modèle dit "KG" pour Katz et Gratias). Il est constitué d'un atome au centre, un icosaèdre et un icosidodécaèdre soit 1+12 +20 = 33 atomes.



Ceci est l'une des vues selon les axes respectivement 2, 3 et 5 d'un modèle atomique de l'alliage Al-Pd-Mn.

Mes quasi-cristaux.

Mes quasi-cristaux sont des ensembles de points: les sommets des losanges des figures précédentes.

La définition qui suit est due à Jeffrey Lagarias et Robert Moody.

Soit Λ un ensemble de points du plan ou de l'espace. On dit que Λ est un «Meyer set» si les trois conditions suivantes sont remplies:

(a) Il existe un rayon r et une constante C tels que tout disque de rayon r, quelque soit son centre, contienne au plus C points de Λ.

(b) Il existe un rayon r' et une constante C' tels que tout disque de rayon r', quelque soit son centre, contienne au moins un point de Λ.

(c) L'ensemble Λ-Λ de toutes les différences λ-λ' entre deux points de Λ possède aussi les propriétés (a) et (b).

Un réseau de points, par exemple les points à coordonnées entières, remplit ces conditions.

Les sommets de certains des quasi-cristaux de Penrose sont des Meyer sets.

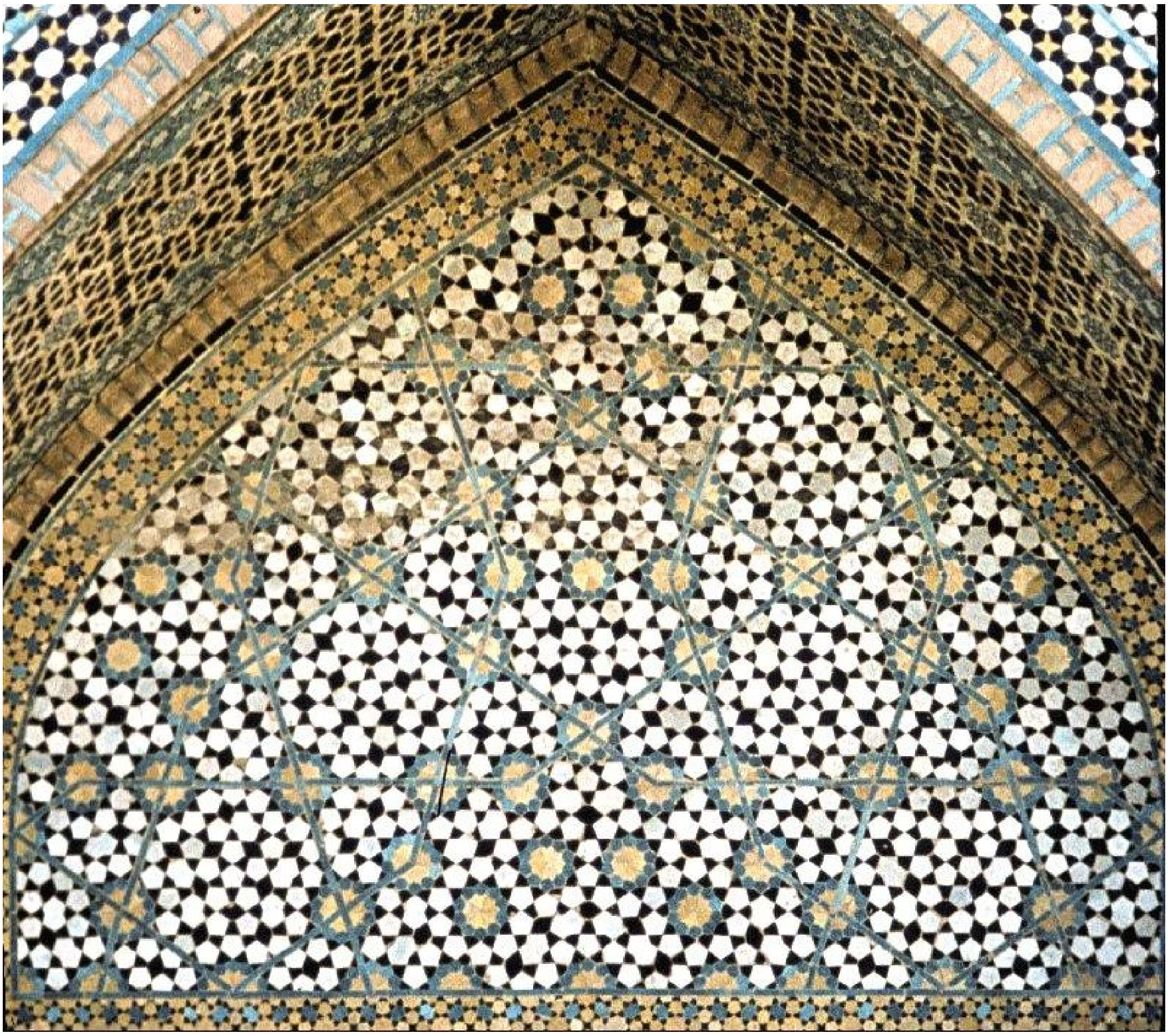
Si Λ est un «Meyer set» et si, pour un nombre réel $\theta > 1$, $\theta\Lambda$ est inclus dans Λ, alors θ est un nombre de Pisot ou de Salem.

Une autre propriété d'un «Meyer set» Λ est que l'image de diffraction de Λ soit aussi un «Meyer set».

Dans Google il faut chercher «Meyer sets» et non «Meyer set».

Les quasi-cristaux et l'Islam.

Il y a deux ans, le physicien Peter Lu, de Harvard, remarqua *sur le mur d'une madrassa à Boukhara, en Ouzbékistan, un motif géométrique identique à celui d'un quasicristal.* Cet édifice date du quinzième siècle. Peter Lu consulte aujourd'hui les livres écrits par les artistes musulmans du Moyen Âge. Il cherche si certains motifs géométriques qui y sont proposés respectent les règles de construction établies par Penrose. Les artistes musulmans n'avaient pas le droit de représenter l'homme ou les animaux, ce qui les conduisit à la découverte de nouveaux motifs géométriques d'une incroyable sophistication.



Les sciences et les arts se donnent la main et se prêtent un appui mutuel.

J'ai été stupéfait quand j'ai compris que ce que je faisais par amour de la beauté pure («Meyer sets» et nombre de Pisot) était utile, intervenait en chimie.

La découverte de la profonde unité des sciences m'a procuré un grand bonheur.

Les sciences communiquent entre elles, elles se parlent et s'enrichissent dans ces dialogues. Il est impossible de les isoler, de les confiner, de les séparer.

La beauté sauvera le monde

(Fedor Dostoïevski).

Exemple d'un pavage non structuré. On part de la dimension 1 et l'on se donne deux intervalles I et J de longueur 1 et θ où θ est irrationnel. On met, de façon complètement désordonnée, ces intervalles bout à bout de façon à recouvrir toute la droite réelle par des intervalles notés I_k dont les longueurs sont soit 1, soit θ. On fait la même chose sur l'axe des ordonnées et l'on obtient des intervalles J_l dont les longueurs sont 1 ou θ. Le pavage du plan non structuré est alrs donné par les rectangles $I_k \times J_l$ qui sont au nombre de 4. Les sommets des rectangles ainis définis ne forment pas un « Meyer set ».

Dans Google on consultera les rubriques Quasi-cristaux, Quasicrystals, Meyer sets et Quasicrystals and Islamic Art.

Arabesque, Jean-Marc Castera, ACR Edition (24 novembre 1998).

Je recommande aussi Quasicrystals and Geometry, Marjorie Senechal, Cambridge University Press (1995).

Signalons enfin l'article par Marjorie Senechal, What is a quasycristal ?, Notices of the American Mathematical Society, Sept. 2006.