Panoramas & Synthèses
46, 2015, p. 1–133

GROUPES CLASSIQUES

par

Baptiste Calmès & Jean Fasel

Résumé. – Nous introduisons les groupes algébriques linéaires dits « classiques » sur une base quelconque, puis nous les replaçons dans la classification des groupes réductifs établie dans [**6**]. Nous traitons les cas non déployés, et décrivons au passage plusieurs catégories de torseurs.

***Abstract* (Classical groups).** – We introduce so-called "classical" linear algebraic groups over a general base, and we then place them where they belong in the classification of reductive groups established in [**6**]. We cover the non split cases, and we describe on the way several categories of torsors.

1. Introduction

L'objet principal de [**6**] est la classification des schémas en groupes réductifs sur une base quelconque. Rappelons tout d'abord qu'un groupe algébrique G sur une base S est réductif (au sens de [**6**], voir Exp. XIX, déf. 2.7) s'il est lisse et affine sur S, et à fibres géométriques réductives et connexes au sens de la théorie sur les corps ; sur les fibres géométriques, son radical est donc un tore (voir [**6**, Exp. XIX, déf. 1.6.1]). Il est de plus semi-simple si ces fibres sont semi-simples (radical trivial). Notons qu'être réductif ou semi-simple est en fait par descente une propriété locale pour toutes les topologies considérées dans cet article.

Le but de cette note est de faire le lien entre les groupes linéaires et quadratiques dits « classiques » et la classification de [**6**]. Cet exposé s'adressant en priorité aux lecteurs qui ne sont pas habitués à la terminologie employée dans l'ouvrage, de nombreux détails de calculs, exemples et traductions sont fournis.

***Classification mathématique par sujets* (2010).** – 20G07, 20G10, 14L15, 14L30.
Mots clefs. – Groupe classique, schéma en groupes, algèbre centrale simple, algèbre à division, forme quadratique, groupe orthogonal, groupe linéaire, torseur.

© Panoramas et Synthèses 46, SMF 2015

Notations. – *Dans tout ce qui suit, R désigne un anneau associatif commutatif et unitaire, S un schéma de base quelconque, implicitement égal à* $\mathrm{Spec}(R)$ *lorsqu'il est affine.*

Soit X un schéma sur S, et soit $T \to S$ un morphisme de schémas. La notation X_T désigne le produit fibré de X par T sur S. Lorsque T est le spectre d'un anneau R', on s'autorisera également la notation $X_{R'}$ pour X_T. Un point $s \in S$ correspond à un morphisme de son corps résiduel $\kappa(s)$ vers S, et $X_s = X_{\kappa(s)}$ est alors appelé *fibre* en s. Si $\bar{s}$ est le spectre d'une clôture algébrique de $\kappa(s)$, le schéma $X_{\bar{s}}$ est appelé *fibre géométrique.*

La méthode suivie dans ce texte comporte plusieurs étapes. Tout d'abord, il nous faut introduire et définir les groupes classiques que l'on veut replacer dans la classification. Il s'agit des groupes semi-simples adjoints ou simplement connexes, des séries A_n, B_n, C_n et D_n, bien que nous en manipulions bien d'autres au passage. Conformément à la philosophie de [**6**], les schémas (en groupes) sont vus comme des foncteurs de points représentables. Nos groupes classiques sont donc introduits comme des foncteurs de points, puis on montre qu'ils sont représentables par des schémas affines sur la base, ce qui ne pose pas de réelle difficulté pour deux raisons : beaucoup de nos groupes sont construits comme des produits fibrés de groupes obtenus précédemment, et cette opération préserve la représentabilité. Par ailleurs, la représentabilité par des schémas affines sur la base peut se tester localement pour la topologie fppf ou étale. Ces deux topologies de Grothendieck sont d'ailleurs quasiment les seules que nous utiliserons, en dehors de la topologie de Zariski, bien entendu.

Les groupes classiques se construisent à l'aide de structures algébriques comme des modules quadratiques, des algèbres d'Azumaya, ou des algèbres à involution. Nous discutons donc ces structures sur une base quelconque dans les sections 2.5, 2.6 et 2.7. Les groupes sont alors introduits dans les parties 2.4 et 3 pour les groupes de type linéaire (liés au type A_n), ainsi que dans la partie 4 pour les groupes en rapport avec les modules quadratiques ou plus généralement les algèbres à involution.

Une fois la plupart des groupes introduits, il faut identifier les groupes déployés, leur version sur $\mathbb{Z}$, dits groupes de Chevalley, et prouver qu'ils sont bien réductifs. Le principal problème est la lissité, qui doit essentiellement être obtenue à la main en vérifiant d'abord la lissité de chaque fibre géométrique, ce qui revient, parce qu'on est sur un corps, à comparer la dimension de Krull et celle de l'algèbre de Lie, puis on montre que la dimension de ces fibres ne varie pas. Les critères précis sont rappelés en section 2.9.

L'étape d'après, est de trouver la donnée radicielle de chacun des groupes. Cela consiste à décrire un tore maximal déployé, expliciter l'algèbre de Lie et la représentation adjointe, y trouver les racines, et constater qu'elles forment bien les données radicielles des types considérés.

Ces deux dernières étapes forment les parties intitulées « Groupe déployé adjoint » et « Groupe déployé simplement connexe » de chacune des sections 3 (type A_n), 6 (type B_n), 7 (type C_n) et 8 (type D_n).

Il reste alors le problème de la torsion. Si **[6]** nous dit que tous les groupes réductifs sont des formes étales des groupes déployés, il nous faut montrer pour être complet que les différents groupes classiques que nous avons introduits, en plus du cas déployé, constituent toutes les formes étales de ces groupes, qu'il n'y en a pas d'autres. Pour cela, nous avons recours au formalisme du produit contracté, décrit en section 2.2. Ce formalisme nous dit que toute forme est en fait un produit contracté du groupe par un torseur sous son groupe d'automorphismes. Il nous faut donc identifier les groupes d'automorphismes, ce qui est fait dans les sections du même nom dans les quatre parties 3, 6, 7 et 8.

Puis, il faut être capable de donner une description assez concrète des torseurs pour expliciter les produits contractés. C'est la raison pour laquelle nous utilisons des champs, car c'est un cadre très souple dans lequel on peut formaliser les produits contractés, et construire des catégories concrètes d'objets algébriques (par exemple les modules quadratiques), équivalentes à des catégories de torseurs. Le texte est donc parsemé de théorèmes qui comparent un champ bien concret (comme celui des modules quadratiques) avec une catégorie de torseurs (par exemple sous le groupe orthogonal). Comme nous savons que le mot « champ » provoque immanquablement chez certains un rhume des foins, nous nous empressons d'ajouter que nous n'utilisons aucune des subtilités qui font le bonheur des champistes. Le peu de choses que nous utilisons effectivement est rappelé dans les parties 2.1 et 2.2, et pourrait se résumer en quelque mots : un champ est une sorte de catégorie dans laquelle les objets et les morphismes peuvent se construire localement. Nous faisons un usage répétitif des produits fibrés de champs, pour en fabriquer de nouveaux sans peine. Les premiers champs que nous introduisons sont construits comme des structures sur les faisceaux, ce qui explique la présence de la partie 2.1. Nous avons également inclus à titre d'exemple quelques calculs de gerbes, qui correspondent aux morphisme de connexion vers le terme H^2 des suites exactes de cohomologie.

Faute de temps, nous avons laissé de côté un certain nombre de choses, qui pourraient probablement être traitées par les mêmes méthodes. Citons : la description systématique des catégories de torseurs sous tous les groupes mentionnés, y compris ceux qui ne sont pas déployés ; la description des variétés projectives homogènes sous les groupes considérés ; la description de types simples intermédiaires entre le cas simplement connexe et le cas adjoint, lorsqu'ils existent (par exemple en type A_n) ; la description de types mixtes ; la description des types exceptionnels déjà connus sur les corps (ex : G_2, F_4) ; la description du type D_4 ; la description des isomorphismes exceptionnels de bas rang.

Les principales difficultés que nous avons rencontrées sont de deux natures : premièrement, bien souvent, dans la littérature, les constructions sont faites sur les corps, en distinguant la caractéristique 2 des autres. Or, pour travailler sur une base quelconque, ces distinctions sont interdites, les constructions doivent être indépendantes d'une éventuelle caractéristique. Deuxièmement, sur un corps, tous les fibrés vectoriels sont triviaux, et certains invariants ne se voient donc pas. Nous avons donc dû en rajouter certains. Voir par exemple l'invariant l_q qui intervient dans les formes strictement intérieures des types simplement connexes B_n et D_n.

Outre SGA3, les trois grandes références que nous avons utilisé sans vergogne sont le livre de Giraud sur les champs [**8**], celui de Knus sur les formes quadratiques [**14**], et le livre des involutions de Knus, Merkurjev, Rost et Tignol [**15**], ce dernier principalement pour sa notion de paire quadratique, qui fonctionne en toute caractéristique, et tous les groupes qui en découlent.

Vu le grand nombre de groupes et de champs considérés, pour que la lectrice ne soit pas perdue, nous avons ajouté des tables à la fin du texte qui listent les groupes les plus importants, ainsi que les équivalences entre certains champs et certaines catégories de torseurs, avec références aux endroits du texte concernés.

Nous remercions vivement Philippe Gille pour diverses explications sur des points techniques de SGA3, Cyril Demarche pour son aide sur les champs et les gerbes, Asher Auel pour ses précisions sur les algèbres de Clifford, et enfin Skip Garibaldi, Sylvain Brochard et les rapporteurs anonymes pour leurs suggestions d'amélioration à partir d'une version préliminaire de ce texte.

2. Préliminaires

2.1. Structures

2.1.1. *Structures élémentaires.* – Expliquons brièvement la notion de structure dans une catégorie $\mathscr{C}$ munie de produits finis, puis la notion d'objet $\mathfrak{X}$ en cette structure. Nous voulons que ce formalisme puisse contenir la notion d'objet en groupes dans une catégorie donnée, ou bien la notion de $\mathbf{O}_S$-modules dans la catgorie des S-foncteurs de points ; voir les exemples 2.1.1.4 ci-après. Dans tout les cas, il faut pouvoir spécifier des morphismes, comme la muliplication $G \times G \to G$ d'un objet en groupes, et des contraintes vérifiées par ces morphismes, comme l'associativité. Enfin, nous avons besoin d'objets et de morphismes que nous appellerons constants, comme par exemple l'objet neutre qui nous servira d'unité pour les groupes, ou bien l'objet en anneaux $\mathbf{O}_S$ et sa multiplication, dont on se sert pour définir chaque $\mathbf{O}_S$-modules.

En termes précis, ces structures se formalisent à l'aide de deux constructions catégoriques classiques : Étant donné un graphe orienté γ, notons $\mathrm{Cat}(\gamma)$ la catégorie engendrée par ce graphe (la catégorie des chemins de ce graphe). Cette construction est fonctorielle et définit un adjoint à gauche du foncteur oubli de la catégorie des petites catégories vers celle des graphes (voir [**17**, Ch. II, §7]). Notons également $\Pi(\mathscr{C})$ la complétion d'une petite catégorie $\mathscr{C}$ par les produits finis. C'est également une construction fonctorielle, et qui définit un adjoint à gauche du foncteur d'oubli de la catégorie des petites catégories munies de produits finis (avec pour morphismes les foncteurs les respectant) vers la catégorie des petites catégories. Une autre manière de le dire est que pour toute petite catégorie $\mathscr{C}$, il y a un foncteur canonique $\mathscr{C} \to \Pi(\mathscr{C})$ et on a la propriété universelle suivante : tout foncteur de $\mathscr{C}$ dans une catégorie $\mathscr{D}$ munie de produits finis se factorise de manière unique par un foncteur $\Pi(\mathscr{C}) \to \mathscr{D}$ qui conserve les produits. La catégorie $\Pi(\mathscr{C})$ se construit aisément de manière combinatoire à partir de $\mathscr{C}$.(1)

***Définition* 2.1.1.1.** – Une *structure dans* $\mathscr{C}$ est la donnée de :

1. un graphe orienté fini γ et un morphisme de graphes orientés $c : \gamma \to \mathscr{C}$ (qui spécifie les constantes) ;
2. un ensemble fini I et un graphe F contenant le graphe $\Pi(\mathrm{Cat}(I \sqcup \gamma))$, ayant les mêmes sommets que celui-ci, et seulement un nombre fini d'arêtes supplémentaires (qui correspondent aux morphismes) ;
3. une relation d'équivalence R sur les morphismes de $\Pi(\mathrm{Cat}(F))$ engendrée par un nombre fini de relations $f \sim g$ entre morphismes de $\Pi(\mathrm{Cat}(F))$ (ce qui définit les contraintes sur les morphismes).

On obtient alors un morphisme de graphes g donné par la composée

$$\gamma \to I \sqcup \gamma \to \mathrm{Cat}(I \sqcup \gamma) \to \Pi(\mathrm{Cat}(I \sqcup \gamma)) \subseteq F \to \Pi(\mathrm{Cat}(F))$$

(où les unités des deux adjonctions ont été utilisées) et on peut considérer la catégorie quotiente $\Pi(\mathrm{Cat}(F))/R$, au sens de [**17**, Ch. II, §8].

***Définition* 2.1.1.2.** – Si $\mathfrak{struc}$ est une structure dans $\mathscr{C}$ au sens de la définition précédente, un *objet en* $\mathfrak{struc}$ est un foncteur $\mathfrak{X} : \Pi(\mathrm{Cat}(F))/R \to \mathscr{C}$ tel que $\mathfrak{X} \circ g = c$. La catégorie $\mathscr{C}^{\mathfrak{struc}}$ des objets en $\mathfrak{struc}$ est celle des foncteurs $\Pi(\mathrm{Cat}(F))/R \to \mathscr{C}$.

Remarquons que la donnée d'un tel foncteur $\mathfrak{X}$ est équivalente à la donnée d'un foncteur $\Pi(\mathrm{Cat}(F)) \to \mathscr{C}$, compatible à la relation d'équivalence R, et que $c : \gamma \to \mathscr{C}$ étant déjà fixé, par les propriétés universelles, il suffit de donner les objets images des $i \in I$ (qu'on peut noter X_i) puis les images des arêtes supplémentaires de F, en s'assurant qu'elles respectent les contraintes données par la relation d'équivalence.

***Définition* 2.1.1.3.** – Si $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ est foncteur respectant les produits finis, on peut pousser une structure $\mathfrak{struc}$ dans $\mathscr{C}$ vers une structure $F(\mathfrak{struc})$ dans $\mathscr{D}$ de la manière évidente, et on obtient également un foncteur $F : \mathscr{C}^{\mathfrak{struc}} \to \mathscr{D}^{F(\mathfrak{struc})}$.

***Exemple* 2.1.1.4.** – Tout d'abord, pour chaque ensemble I, la structure triviale sur un ensemble d'objets indicés par I est celle pour laquelle les constantes, morphismes et relations sont vides. Mentionnons encore les structures suivantes (dans les S-foncteurs de points, ou dans les S-faisceaux pour une certaine topologie) que nous rencontrerons :

(1) Nous n'avons pas de bonne référence pour cette construction, mais on peut procéder comme suit : on considère la catégorie dont les objets sont des ensembles finis au-dessus de l'ensemble des objets de $\mathscr{C}$, et avec pour morphismes de $\phi : A \to \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ vers $\psi : B \to \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ les applications $\theta : A \to B$ munies d'un étiquetage $a \mapsto f_a$ de chaque élément de A par un morphisme $f_a : \phi(a) \to \psi(\theta(a))$ de $\mathscr{C}$. On vérifie alors que la catégorie opposée de cette catégorie répond au problème.

1. groupe $\mathfrak{gr}$: le seul objet constant est S (donc le graphe γ a un sommet et aucune arête), les morphismes sont l'unité $S \to G$, la loi de groupe $G \times G \to G$ et l'inverse $G \to G$ (l'ensemble I a donc un élément, et le graphe F a 3 morphismes supplémentaires), et les relations imposent les contraintes bien connues, comme l'associativité ;
2. groupe abélien : une structure de groupe, avec la commutativité ajoutée aux relations ;
3. anneau : une loi d'addition, de multiplication et les diagrammes évidents. En particulier, dans la catégorie des S-foncteurs, l'anneau que nous noterons $\mathbf{O}_S$. Il est construit comme tiré à S de $\mathbf{O} = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[x])$, et vérifie $\mathbf{O}_S(T) = \Gamma(T, \mathcal{O}_T)$, qu'on abrège en $\Gamma(T)$, pour tout schéma T au-dessus de S. En particulier, $\mathbf{O}(\mathrm{Spec}(R)) = R$ pour tout anneau R (cf. [**6**, Exp. I, 4.3.3]). Les morphismes structuraux sont ceux qui induisent la structure d'anneau dessus ;
4. $\mathbf{O}_S$-module : les constantes sont l'anneau $\mathbf{O}_S$ et ses morphismes de structure, puis on se donne une structure de groupe abélien et d'action de $\mathbf{O}_S$ avec les relations habituelles ;
5. $\mathbf{O}_S$-algèbre $\mathfrak{alg}$: la structure de $\mathbf{O}_S$-module assorti d'une multiplication muni d'une unité avec les relations habituelles (y compris l'associativité) ;
6. $\mathbf{O}_S$-algèbre à involution $\mathfrak{alginv}$: la structure de $\mathbf{O}_S$-algèbre avec un endomorphisme σ du $\mathbf{O}_S$-module sous-jacent, qui anti-commute à la multiplication et qui vérifie $\sigma^2 = \mathrm{id}$ (et qui est donc un automorphisme de module) ;
7. $\mathbf{O}_S$-forme bilinéaire (resp. symétrique, alternée), c'est-à-dire une structure de $\mathbf{O}_S$-module, avec un morphisme $M \times M \to \mathbf{O}_S$ qui est bilinéaire (resp. et symétrique ou alterné) ;
8. $\mathbf{O}_S$-module quadratique : une structure de $\mathbf{O}_S$ module, à laquelle on rajoute un morphisme $q : M \to \mathbf{O}_S$ qui est quadratique en la multiplication par les scalaires de $\mathbf{O}_S$ et tel que le module polaire associé satisfait aux relations de bilinéarité de l'exemple précédent ;
9. G-action à gauche G-$\mathfrak{act}$ (ou à droite $\mathfrak{act}$-G) : étant donné un objet en groupes G, utilisé comme objet constant, un G-objet est un objet X muni d'un morphisme $G \times X \to X$ satisfaisant les diagrammes d'associativité et de l'action triviale du neutre. Cette action peut être à gauche ou à droite, auquel cas le morphisme considéré est plutôt $X \times G \to X$.

***Remarque* 2.1.1.5**. – Dans les exemples précédents, il est parfois utile d'ajouter des morphismes auxquels on ne pense pas immédiatement pour avoir les bonnes relations. Par exemple dans l'exemple des modules quadratiques, il faut construire la forme polaire. Pour cela, il est pratique d'utiliser le morphisme « multiplication par -1 », endomorphisme de l'objet constant $\mathbf{O}_S$ et qu'on ajoutera donc aux constantes de la structure.

2.1.2. *Changement de base des structures.* – Afin de formaliser les changements de base, la première notion à introduire est celle de catégorie fibrée sur une catégorie de base, qui sera pour nous toujours celle des S-schémas, aussi nous nous limitons à ce cas.

***Définition* 2.1.2.1**. – Une *catégorie fibrée scindée* sur les S-schémas, abrégé en *S-catégorie fibrée* dans ce texte, est la donnée de :

- pour tout schéma T sur S, une catégorie $\mathscr{C}_T$ appelée fibre sur T ;
- pour tout S-morphisme $f : T' \to T$, un foncteur de changement de base $\phi_f : \mathscr{C}_T \to \mathscr{C}_{T'}$;
- pour tout T sur S, un isomorphisme de foncteurs $\epsilon_T : \phi_{\mathrm{id}_T} \xrightarrow{\sim} \mathrm{id}_{\mathscr{C}_T}$;
- pour toute paire de morphismes composables f et g, un isomorphisme de foncteurs $\iota_{f,g} : \phi_g \circ \phi_f \xrightarrow{\sim} \phi_{f\circ g}$.

Ces isomorphismes doivent vérifier une condition de compatibilité entre ϵ et ι lorsque l'un des deux morphismes est l'identité, et une relation d'associativité, toutes deux aisées à deviner.

Comme il est de coutume, si X est un objet de $\mathscr{C}_T$ et T' un T-schéma, nous désignerons son changement de base $\phi_{T'\to T}(X)$ par $X_{T'}$.

***Définition* 2.1.2.2**. – Un foncteur F d'une S-catégories fibrée $\mathscr{C}$ vers une autre $\mathscr{D}$ est la donnée, pour chaque T sur S, d'un foncteur $F_T : \mathscr{C}_T \to \mathscr{D}_T$, de manière à commuter avec les foncteurs de changement de base.

***Définition* 2.1.2.3**. – Soient $F_1 : \mathscr{C}_1 \to \mathscr{D}$ et $F_2 : \mathscr{C}_2 \to \mathscr{D}$ deux foncteurs de S-catégories fibrées. Alors on définit le produit fibré de catégories fibrées $\mathscr{C}_1 \times_{\mathscr{D}} \mathscr{C}_2$ comme la catégorie fibrée dont les objets sur T sont les triplets (x_1, x_2, ϕ) avec $x_i \in (\mathscr{C}_i)_T$, $\phi : F_1(x_1) \xrightarrow{\sim} F_2(x_2)$ et dont les morphismes $(x_1, x_2, \phi) \to (y_1, y_2, \psi)$ sont les paires de morphismes $f_1 : x_1 \to y_1$ et $f_2 : x_2 \to y_2$ tels que $\psi \circ F_1(f_1) = F_2(f_2) \circ \phi$.

Notons P_i, $i = 1, 2$, les foncteurs de projection évidents $\mathscr{C}_1 \times_{\mathscr{D}} \mathscr{C}_2 \to \mathscr{C}_i$, et c l'isomorphisme de foncteurs $F_1P_1 \xrightarrow{\sim} F_2P_2$ donné par $c_{(x_1,x_2,\phi)} = \phi$. Il est immédiat que le produit fibré $\mathscr{C}_1 \times_{\mathscr{D}} \mathscr{C}_2$ satisfait à la propriété universelle suivante.

***Proposition* 2.1.2.4**. – *Étant donné une S-catégorie fibrée $\mathscr{A}$, deux foncteurs $G_1 : \mathscr{A} \to \mathscr{C}_1$ et $G_2 : \mathscr{A} \to \mathscr{C}_2$ et un isomorphisme de foncteurs $a : F_1G_1 \xrightarrow{\sim} F_2G_2$, il existe un unique foncteur $H : \mathscr{A} \to \mathscr{C}_1 \times_{\mathscr{D}} \mathscr{C}_2$ tel que pour $i = 1, 2$, on ait $P_iH = G_i$ et l'égalité de morphismes de foncteurs $cH = a$.*

Un *groupoïde* est une catégorie dans laquelle tous les morphismes sont des isomorphismes. A toute catégorie $\mathscr{C}$, on peut associer un groupoïde $\mathscr{C}_{\simeq}$, qui a les mêmes objets, mais dont les morphismes sont les seuls isomorphismes de $\mathscr{C}$. De même, le groupoïde $\mathscr{C}_{\simeq}$ associé à une catégorie fibrée $\mathscr{C}$ est la catégorie fibrée de fibres $(\mathscr{C}_{\simeq})_T = (\mathscr{C}_T)_{\simeq}$.

Nous voulons maintenant pouvoir manipuler des objets en une structure, mais sur une catégorie fibrée, et de manière compatible au changement de base. En d'autres termes, étant donné une structure $\mathfrak{struc}$ dans la catégorie $\mathscr{C}_S$, nous allons définir la

S-catégorie fibrée des objets en $\mathfrak{struc}$. Nous supposerons toujours dans ce contexte que les fibres de $\mathscr{C}$ admettent des produits finis, et que les morphismes de changement de base les respectent. Une struture $\mathfrak{struc}$ dans $\mathscr{C}_S$ fournit par changement de base une structure $\mathfrak{struc}_T$ sur $\mathscr{C}_T$ par 2.1.1.3 : les objets et morphismes constants sont obtenus par changement de base de ceux de $\mathscr{C}_S$ à $\mathscr{C}_T$, et les objets en $\mathfrak{struc}_T$ doivent être munis de morphismes satisfaisant aux « mêmes » contraintes. Le changement de base définit ainsi un foncteur $\mathscr{C}_S^{\mathfrak{struc}} \to \mathscr{C}_T^{\mathfrak{struc}_T}$.

***Définition* 2.1.2.5**. – Étant données une S-catégorie fibrée $\mathscr{C}$ (munie de produits finis respectés par les changements de base) et une structure $\mathfrak{struc}$ dans $\mathscr{C}_S$, on définit la catégorie fibrée $\mathscr{C}^{\mathfrak{struc}}$ de fibre $(\mathscr{C}^{\mathfrak{struc}})_T = (\mathscr{C}_T)^{\mathfrak{struc}_T}$ et dont les changements de base sont induits par ceux de $\mathscr{C}$.

Cela permet de construire de nouvelles catégories fibrées à partir de certaines structures.

Par exemple, la catégorie fibrée des $\mathbf{O}$-modules, dont la T-fibre sera constituée des $\mathbf{O}_T$-modules, peut être obtenue à partir de la catégorie fibrée $\mathscr{C}$ des faisceaux, dont la T-fibre est constituée des T-faisceaux (voir page 9), en considérant l'objet constant $\mathbf{O}_S$ pour définir la structure de $\mathbf{O}_S$-module dans $\mathscr{C}_S$.

2.1.3. *Champs.* – Pour pouvoir décrire concrètement les catégories de torseurs sous des groupes classiques, nous avons besoin d'un cadre dans lequel on puisse tordre un objet d'une catégorie par un torseur sous son groupe d'automorphismes, et obtenir ainsi un nouvel objet de cette catégorie. Le bon cadre pour ce type d'opérations est celui des champs, tel que développé dans [**8**], dont nous n'aurons en fait besoin que d'une petite part. Aussi, le but de ce qui suit est d'introduire et de rendre palpable la partie de la théorie dont nous aurons besoin pour le lecteur qui ne connaît pas les champs.

***Définition* 2.1.3.1**. – Un *S-foncteur de points* est un préfaisceau d'ensembles sur la catégorie des S-schémas, autrement dit un foncteur contravariant des S-schémas vers les ensembles.

***Définition* 2.1.3.2**. – On dit qu'un foncteur de points est *représentable par un schéma X* s'il est isomorphe au foncteur $T \mapsto X(T)$, où $X(T) = \mathrm{Hom}_{S\text{-schéma}}(T, X)$.

On peut restreindre un foncteur à la sous-catégorie pleine des schémas affines sur S. Or, le foncteur qui envoie un S-schéma sur son foncteur de points restreint aux S-schémas affines sur S est pleinement fidèle (voir [**5**, th. de comparaison, p. 18]). En d'autres termes, pour connaître un schéma (ou un morphisme de schémas), il suffit de connaître ses points sur les schémas affines sur S. Nous définirons donc de nombreux schémas en donnant leurs S-points sur les schémas affines sur S, puis en montrant que le foncteur est représentable, ce qui montre que le foncteur de points s'étend de manière unique à tous les schémas sur S. Pour décrire un morphisme de schémas, il suffit alors de donner des morphismes de foncteurs de points. Autrement dit, lorsque X_1 et X_2 sont deux S-schémas, la donnée d'un morphisme de S-schémas $X_1 \to X_2$

revient à la donnée d'applications d'ensembles $X_1(Y) \to X_2(Y)$ pour tout S-schéma Y, de manière fonctorielle en Y. Il suffit même de donner ces morphismes pour les schémas Y affines sur S, par ce qui précède. Ce dernier point est particulièrement utile pour définir des morphismes de schémas sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, car il suffit alors de décrire le morphisme sur tous les R-points, R étant un anneau. Par exemple, pour donner une structure de schéma en groupes sur un S-schéma X, on peut décrire les morphismes donnant la structure de groupe sur chaque $X(Y)$, de manière fonctorielle en Y.

L'ajout d'une *topologie de Grothendieck* $\mathbb{T}$ sur la catégorie des S-schémas permet de parler de propriétés locales d'objets d'une S-catégorie fibrée, et de définir la notion de faisceau, que nous rappelons ci-dessous. Nous ne pouvons rappeler ici la définition exacte d'une topologie de Grothendieck, et renvoyons le lecteur à [**6**, Exp. IV, §4.2]. Nous la supposerons toujours associée à une prétopologie, c'est-à-dire la spécification de recouvrements de chaque S-schémas T, un recouvrement de T étant un ensemble de morphismes à but T. Ces recouvrements doivent bien entendu satisfaire certains axiomes (*loc. cit.* déf. 4.2.5), qui miment ceux des ouverts d'une topologie classique. Cette topologie sera souvent sous-entendue, et en pratique les topologies considérées dans le cadre qui nous occupe sont les topologies de Zariski, étale, fppf et dans une moindre mesure fpqc (dans l'ordre de la moins fine à la plus fine).

***Définition* 2.1.3.3**. – Un S-foncteur de points X, i.e. un foncteur contravariant des S-schémas vers les ensembles, sera dit un *S-faisceau* (pour la topologie $\mathbb{T}$) s'il satisfait aux conditions habituelles :

1. $X(\varnothing)$ est un singleton.
2. Pour tout S-schéma T, et pour tout recouvrement $(T_i \to T)_{i\in I}$ de T, si on note $T_{ij} = T_i \times_T T_j$, le diagramme d'ensembles

$$X(T) \xrightarrow{\ i\ } \prod_{i\in I} X(T_i) \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} \prod_{(i,j)\in I^2} X(T_{ij})$$

est exact, au sens que le morphisme de gauche est injectif et identifie $X(T)$ avec l'égalisateur des deux morphismes de droite, où le morphisme p_1 est induit par les projections sur le premier facteur $T_{ij} \to T_i$ et p_2 par celles sur le deuxième facteur $T_{ij} \to T_j$.

(La première condition découle de la seconde, lorsque le schéma vide $\varnothing$ admet le recouvrement vide (à ne pas confondre avec le recouvrement par le vide, qui est toujours présent) dans la topologie $\mathbb{T}$, ce qui sera le cas de toutes les topologies que nous considérerons par la suite.) Pour $T \to S$ donné, on vérifie, voir [**6**, Exp. IV, Prop. 4.5.2], que la restriction des S-foncteur de points vers les T-foncteurs de points, envoyant X sur X_T donné par $X_T(T') = X(T')$ pour tout $T' \to T$, envoie bien les S-faisceaux sur les T-faisceaux. On peut donc définir la catégorie fibrée des faisceaux (pour la topologie $\mathbb{T}$ sur S), en utilisant les restrictions comme foncteurs de changement de base. Nous noterons cette catégorie $\mathscr{F}\!aisc_{/S,\mathbb{T}}$, voire $\mathscr{F}\!aisc_{/S}$.

De manière imagée, un champ est une catégorie fibrée (sur une catégorie de base munie d'une topologie) dans laquelle on peut définir les objets et les morphismes localement par recollement. En étant encore plus imprécis, c'est une sorte de faisceau de catégories.

***Définition* 2.1.3.4**. – Un S-*champ* (pour la topologie $\mathbb{T}$) est une S-catégorie fibrée (voir déf. 2.1.2.1) $\mathscr{C}$ qui vérifie pour tout S-schéma T :

1. Pour tous x, y objets de $\mathscr{C}_T$, le T-foncteur de points $T' \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_{T'}}(x_{T'}, y_{T'})$ est un $\mathbb{T}$-faisceau.
2. La descente sur les objets : Soit $(T_i)_{i\in I}$ un recouvrement de T. Notons T_{ij} le produit fibré de $T_i \times_T T_j$. Soient des objets $x_i \in \mathscr{C}_{T_i}$, et des isomorphismes $\psi_{ij} : (x_i)_{T_{ij}} \xrightarrow{\simeq} (x_j)_{T_{ij}}$ vérifiant la condition de compatibilité évidente sur les produits fibrés triples. Alors il existe un unique (à isomorphisme unique près) objet $x \in \mathscr{C}_T$ muni d'isomorphismes $\lambda_i : x_i \xrightarrow{\simeq} x_{T_i}$ tels que $\psi_{ij} = (\lambda_j)^{-1}_{T_{ij}} \circ (\lambda_i)_{T_{ij}}$ pour tout i, j.

Un morphisme de S-champs est un foncteur de S-catégories fibrées.

***Définition* 2.1.3.5**. – Étant donné un recouvrement $(T_i)_{i\in I}$ de T, la donnée d'objets $x_i \in \mathscr{C}_{T_i}$ et d'isomorphismes compatibles ψ_{ij} au sens du point 1 précédent est appelée *donnée de descente*, relativement au recouvrement fixé.

On peut définir la catégorie des données de descente relativement à un recouvrement donné. Tout objet x de $\mathscr{C}_T$ définit canoniquement une donnée de descente sur n'importe quel recouvrement de T, en posant $x_i = x_{T_i}$ et en définissant les isomorphismes ψ_{ij} canoniquement par la structure de catégorie fibrée. Cela définit un foncteur de $\mathscr{C}_T$ vers la catégorie des données de descente relativement à $(T_i)_{i\in I}$, et la définition d'un champ peut alors se reformuler en disant que ce foncteur est une équivalence de catégories : le point 1 donne la pleine fidélité, et le point 2 l'essentielle surjectivité.

On dit alors qu'on construit un objet de $\mathscr{C}_T$ (resp. un morphisme) « par descente » lorsqu'on en construit une occurrence sur chaque T_i d'un recouvrement de T, ainsi que des isomorphismes de compatibilité sur les produits doubles (resp. rien), et qu'on applique le point 2 (resp. le point 1) de la définition d'un champ pour l'obtenir sur T. Autrement dit, on construit un objet (resp. un morphisme) de la catégorie des données de descente, et on utilise l'équivalence de catégories.

On dit également qu'une condition sur les objets ou les morphismes *descend* ou bien *est locale* pour une certaine topologie, s'il suffit de la vérifier après changement de base à chacun des schémas d'un recouvrement pour cette topologie.

***Exemple* 2.1.3.6**. – Le champ associé à un faisceau X sur S, est la S-catégorie fibrée dont la fibre sur le S-schéma T est la catégorie dont les objets sont les éléments de $X(T)$ avec pour morphismes $\mathrm{Hom}(x,x) = \{id_x\}$ et $\mathrm{Hom}(x,y) = \varnothing$ si $x \neq y$. C'est un exercice facile, qui utilise bien entendu que X est un faisceau et pas un simple préfaisceau, dans la vérification des deux points de la définition. En particulier, le champ associé au faisceau final (constant, un point partout) n'a qu'un seul objet par fibre, et cet objet n'a qu'un seul morphisme, l'identité. Nous noterons ce champ $\mathfrak{Final}$.

***Exemple* 2.1.3.7**. – En fait, on voit même facilement que si les fibres d'une catégorie fibrée sont discrètes et petites, c'est-à-dire que ce sont des catégories avec pour seuls morphismes les identités des objets, et ces objets forment un ensemble, comme dans l'exemple précédent, alors cette catégorie fibrée est un champ si et seulement si le foncteur de points qui à T associe l'ensemble des objets de $\mathscr{C}_T$ est un faisceau.

***Exercice* 2.1.3.8**. – *La catégorie fibrée $\mathfrak{Faisc}_{/S,\mathbb{T}}$ est un champ.*

***Proposition* 2.1.3.9**. – *Si $\mathscr{C}$ est un champ, alors $\mathscr{C}_{\simeq}$ est un champ.*

Démonstration. – On peut construire l'inverse d'un morphisme localement par descente. □

***Proposition* 2.1.3.10**. – *Si $\mathfrak{struc}$ est une structure dans $\mathscr{C}_S$, où $\mathscr{C}$ est un S-champ (muni de produits finis respectés par les changements de base), alors la catégorie fibrée $\mathscr{C}^{\mathfrak{struc}}$ est un champ. En particulier si $\mathfrak{struc}$ est une structure sur les S-faisceaux, alors $\mathfrak{Faisc}^{\mathfrak{struc}}_{/S}$, au sens de la définition* 2.1.2.5, *est un champ.*

Démonstration. – La condition faisceautique des Hom se vérifie par inclusion des morphismes d'objets en $\mathfrak{struc}$ dans les morphismes de $\mathscr{C}$ (ou de puissances de $\mathscr{C}$ lorsque I a plusieurs éléments). Pour la descente des objets en $\mathfrak{struc}$, on construit les objets de $\mathscr{C}$ nécessaires par descente, puis les morphismes structuraux dans $\mathscr{C}$ par la condition faisceautique sur les Hom dans $\mathscr{C}$, et on montre qu'ils vérifient les relations par cette même condition. □

***Notation* 2.1.3.11**. – *Lorsque $\mathscr{C}$ est un S-champ, et X et Y sont des objets de $\mathscr{C}_S$, on note $\mathbf{Hom}^{\mathscr{C}}_{X,Y}$ le S-faisceau dont les T-points sont $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}_T}(X_T, Y_T)$. Lorsque $\mathscr{C}^{\mathfrak{struc}}$ est le champ défini à partir d'une structure sur $\mathscr{C}_S$, comme en* 2.1.3.10, *on utilise également la notation $\mathbf{Hom}^{\mathfrak{struc}}_{X,Y}$ au lieu de $\mathbf{Hom}^{\mathscr{C}^{\mathfrak{struc}}}_{X,Y}$. De même, on définit les faisceaux $\mathbf{End}^{\mathscr{C}}_X = \mathbf{Hom}^{\mathscr{C}}_{X,X}$, $\mathbf{Iso}^{\mathscr{C}}_{X,Y} = \mathbf{Hom}^{\mathscr{C}_{\simeq}}_{X,Y}$ et $\mathbf{Aut}^{\mathscr{C}}_X = \mathbf{Iso}^{\mathscr{C}}_{X,X}$.*

***Remarque* 2.1.3.12**. – Dans cette situation, si T est un S-schéma, on a immédiatement la commutation au changement de base $\mathbf{Hom}^{\mathscr{C}^T}_{X_T,Y_T} = (\mathbf{Hom}^{\mathscr{C}}_{X,Y})_T$ où $\mathscr{C}^T$ est le T-champ obtenu de $\mathscr{C}$ par restriction.

***Exercice* 2.1.3.13 (produit fibré de champs)**. – *Le produit fibré de deux champs au-dessus d'un troisième, au sens de la définition* 2.1.2.3, *est un champ.*

Cette propriété va nous permettre de construire de nombreux champs à partir d'autres.

2.2. Faisceaux en groupes et torseurs. – Expliquons maintenant comment on tord un faisceau X muni d'une action d'un faisceau en groupes H par un torseur P sous H. L'espace ainsi obtenu $P \wedge^H X$ est appelé produit contracté (déf. 2.2.2.9). Lorsque $\mathfrak{X}$ est un objet en une structure $\mathfrak{struc}$ (ex : un faisceau en groupes) et que H la respecte, on peut définir le produit contracté $P \wedge^H \mathfrak{X}$, qui est également un objet en $\mathfrak{struc}$. Sous des hypothèses raisonnables (prop. 2.2.4.5), on obtient ainsi toutes les formes de $\mathfrak{X}$, c'est-à-dire les objets isomorphes à $\mathfrak{X}$ localement pour la topologie considérée. C'est ce qui nous servira à obtenir tous les groupes réductifs d'un type déployé donné à partir du groupe de Chevalley correspondant. Les questions de représentabilité de ces différents faisceaux par des schémas sont regroupées dans la section 2.3 et en particulier dans la proposition 2.3.0.20.

2.2.1. *Actions de groupes.* – Soit H un S-faisceau en groupes et soit X un S-faisceau, muni d'une action à gauche (resp. à droite) de H, donc un objet en H-$\mathfrak{act}$ (resp. en $\mathfrak{act}$-H) comme dans l'exemple 2.1.1.4 (9) ci-dessus. Ceci est équivalent à la donnée d'un morphisme de faisceaux en groupes $H \to \mathbf{Aut}_X$ (resp. $H^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Aut}_X$) (un faisceau à groupes d'opérateurs H dans la terminologie de [**6**]).

Considérons alors la catégorie fibrée $\mathcal{F}\!aisc_{/S}^{H\text{-}\mathfrak{act}}$ (resp. $\mathcal{F}\!aisc_{/S}^{\mathfrak{act}\text{-}H}$), qui est un champ par la proposition 2.1.3.10. Les objets de sa T-fibre sont donc les T-faisceaux munis d'une action à gauche de H_T (resp. à droite).

2.2.2. *Torseurs.* – Soit $\mathbb{T}$ une topologie de Grothendieck sur les S-schémas. Sauf mention contraire, nous supposerons toujours que les faisceaux mentionnés dans cette partie sont des faisceaux au sens de cette topologie. Notons que $\mathcal{F}\!aisc_{/S}$ étant un champ, un morphisme f de faisceaux est un isomorphisme si et seulement s'il en est un localement.

Dans ce qui suit, P désigne toujours un S-faisceau avec action à droite de H, donc un objet de la catégorie $(\mathcal{F}\!aisc_{/S}^{\mathfrak{act}\text{-}H})_S$. La notion symétrique existe bien entendu avec une action à gauche.

***Définition* 2.2.2.1**. – On dit que P est un *pseudo-torseur* ou *formellement principal homogène* (resp. *formellement homogène*) sous H si l'application $P \times H \to P \times P$ dont les composantes sont l'action et la projection est un isomorphisme (resp. un épimorphisme) de faisceaux. Voir [**6**, Exp. IV, 5.1.0, et 6.7.1].

***Définition* 2.2.2.2**. – On dit que P est un torseur (resp. est homogène) sous H pour la topologie $\mathbb{T}$, ou un $\mathbb{T}$-torseur, s'il est un pseudo-torseur (resp. formellement homogène) et que $\mathbb{T}$-localement, P a un point, i.e. $P(S_i) \neq \varnothing$ pour tout S_i dans un certain recouvrement de S.

On notera que contrairement à la notion de pseudo-torseur, qui n'est qu'une notion de foncteurs de points, la notion de torseur dépend bien de la topologie $\mathbb{T}$. Le fait que P est localement non vide revient à ce que son morphisme structural $P \to S$ soit un épimorphisme de faisceau.

***Exemple* 2.2.2.3**. – Lorsqu'on fait agir H sur lui-même à droite par translations, on obtient évidemment un torseur, appelé torseur trivial.

***Proposition* 2.2.2.4**. – *Un faisceau P muni d'une action à droite de H est un torseur si et seulement s'il est $\mathbb{T}$-localement isomorphe au torseur trivial H. Autrement dit, un torseur est un faisceau avec action qui est localement trivial pour la topologie $\mathbb{T}$. De plus, on a alors $P_T \simeq H_T$ si et seulement si $P(T) \neq \varnothing$.*

Démonstration. – Si $P(T)$ contient un point p, alors on construit immédiatement un isomorphisme $H_T \xrightarrow{\sim} P_T$ de faisceaux avec action à droite de H en envoyant h vers $p \cdot h$, et bien entendu, si $P_T \simeq H_T$, alors $P(T) \neq \varnothing$, puisque $H(T)$ contient toujours l'élément neutre. Réciproquement, si P est muni d'une action à droite de H et si $P_T \simeq H_T$, l'application $P_T \times H_T \to P_T \times P_T$ mentionnée plus haut est alors un isomorphisme. C'est donc un isomorphisme localement, donc un isomorphisme. □

***Définition* 2.2.2.5**. – Lorsqu'un torseur P sous H devient isomorphe au torseur trivial après extension à un schéma T sur S, donc $P_T \simeq H_T$ ou de manière équivalente $P(T) \neq \varnothing$, on dit qu'il est *déployé sur T*. On abrège déployé sur S par *déployé*.

***Proposition* 2.2.2.6**. – *Si P_1 et P_2 sont des torseurs sous H, et si $f : P_1 \to P_2$ est un morphisme de faisceaux qui est équivariant sous l'action de H, alors f est un isomorphisme.*

Démonstration. – Si $P_1(T) \neq \varnothing$, alors $f : P_1(T) \to P_2(T)$ est une bijection. En effet, l'action de $H(T)$ est transitive des deux côtés et commute à f. Si $P_2(T) \ni s$, alors on utilise un recouvrement de T par des T_i tels que $(P_1)_{T_i}$ est trivial pour tout i (et a donc un point). On a donc des bijection $f_{T_i} : P_1(T_i) \to P_2(T_i)$, ce qui permet de construire un point dans $P_1(T)$ par recollement des $f^{-1}(s_{T_i})$, ce qui ramène au cas précédent. □

***Proposition* 2.2.2.7**. – *Soit G un S-faisceau en groupes qui agit sur un S-faisceau X de manière homogène. Soit $x \in X(S)$, et soit H le sous-faisceau de G des éléments fixant x. Alors X muni du morphisme $G \to X$ d'action sur x s'identifie au faisceau quotient G/H, muni du morphisme canonique $G \to G/H$.*

Démonstration. – On vérifie la propriété universelle du faisceautisé associé au préfaisceau G/H donné par $(G/H)(T) = G(T)/H(T)$. Il y a bien entendu une flèche canonique de préfaisceaux $G/H \to X$. Pour tout faisceau Y muni d'une flèche $G/H \to Y$, il faut construire l'unique flèche $X \to Y$ l'étendant. Or si un T-point de X est dans l'image de $G \to X$, il est clair qu'il ne peut s'envoyer que sur un seul élément, obtenu en le relevant à $G(T)$, puis en appliquant $G(T) \to (G/H)(T) \to Y(T)$. Puisque l'action de G est homogène, c'est vrai localement, et par descente dans le faisceau Y, on construit donc de manière unique l'image de tout point de X. □

Si P est un S-torseur sous H, alors pour tout $S' \to S$, $P_{S'}$ est un $H_{S'}$-torseur, puisqu'être un pseudo-torseur et le fait d'avoir un point localement sont deux notions stables par changement de base. On peut donc définir une sous-catégorie fibrée (pleine) de $\mathcal{F}aisc_{/S}^{\mathrm{act}\text{-}H}$, donc les objets de la fibre en S' sont les faisceaux avec action de $H_{S'}$ qui sont des torseurs. Cette sous-catégorie fibrée est un champ. En effet, les morphismes de torseurs sont simplement des isomorphismes d'objets avec action à droite, donc forment des faisceaux puisque $\mathcal{F}aisc_{/S}^{\mathrm{act}\text{-}H}$ est un champ, et on a donc également la descente des objets. De plus, étant donné un morphisme $T \to S$, on peut considérer la sous-catégorie fibrée dont les objets de la fibre en S' sont les torseurs déployés par $T \times_S S' \to T$. Elle forme également un sous-champ de manière évidente.

***Définition* 2.2.2.8**. – On note $\mathcal{T}ors(H)$ le champ des torseurs (à droite) sous H, et $\mathcal{T}ors(H, T/S)$ le sous-champ des torseurs déployés par $T \to S$.

***Définition* 2.2.2.9**. – Soient X et P des faisceaux avec action de H respectivement à gauche et à droite. On note $P \wedge^H X$ le faisceau conoyau[2] des deux flèches $H \times P \times X \to P \times X$ données respectivement sur les points par $(h, p, x) \mapsto (ph, x)$ et $(h, p, x) \mapsto (p, hx)$. On appelle $P \wedge^H X$ le *produit contracté* de P et X.

Autrement dit, $P \wedge^H X$ est le faisceautisé du préfaisceau des orbites de H agissant sur $P \times X$ par $(h, (p, x)) \mapsto (ph^{-1}, hx)$. Il est immédiat qu'on définit ainsi un foncteur de la catégorie des S-faisceaux avec action de H (avec morphismes respectant l'action) vers les S-faisceaux.

***Lemme* 2.2.2.10**. – *Cette construction est associative : lorsque Q est muni d'une action à gauche de H et à droite de H' et qu'elles commutent, on a*

$$(P \wedge^H Q) \wedge^{H'} X \cong P \wedge^H (Q \wedge^{H'} X).$$

D'autre part, on a évidemment $H \wedge^H X \cong X$, d'où pour tout morphisme de groupes $\phi : H' \to H$, un isomorphisme $P \wedge^{H'} H \wedge^H X \cong P \wedge^{H'} X$ où H' agit sur X à travers ϕ.

Démonstration. – Laissée au lecteur. □

Dans ce qui suit, P désigne toujours un pseudo-torseur.

***Lemme* 2.2.2.11**. – *Si X_1 et X_2 sont munis d'une action de H, alors l'application naturelle $P \wedge^H (X_1 \times X_2) \to (P \wedge^H X_1) \times (P \wedge^H X_2)$, obtenue par covariance de $P \wedge^H (-)$ et par propriété universelle du produit, est un isomorphisme. N.B. C'est l'application faisceautisée de $(p, (x_1, x_2)) \mapsto ((p, x_1), (p, x_2))$.*

Démonstration. – L'application inverse se définit aisément en utilisant que P est un pseudo-torseur pour identifier $P \times X_1 \times P \times X_2$ avec $P \times X_1 \times H \times X_2$ avant de quotienter par l'action de $H \times H$. □

---

[2] Pour l'existence de ce faisceau, on a fait abstraction des problèmes de théorie des ensembles sur l'existence des faisceautisés d'un préfaisceau pour une topologie de Grothendieck. Pour y remédier, il faut soit savoir que ce faisceau existe dans les cas qui nous intéressent, soit se placer dans un univers fixé comme dans [**5**].

***Proposition* 2.2.2.12.** – *Soit $\phi : H_1 \to H_2$ un morphisme de S-faisceaux en groupes. On peut alors munir H_2 d'une action à gauche de H_1 par ϕ. L'application*

$$P \mapsto P \wedge^{H_1} H_2$$

définit un foncteur de la catégorie des H_1-torseurs (à droite) vers les H_2 torseurs (à droite), et il y a un morphisme de foncteurs d'associativité en cas de composition de deux morphismes.

Démonstration. – Le groupe H_2 agit bien à droite sur $P \wedge^{H_1} H_2$ car les actions de H_1 à gauche et de H_2 à droite sur H_2 commutent. On vérifie qu'il en fait un torseur. La fonctorialité en P est évidente. L'associativité provient du lemme 2.2.2.10. □

Relions maintenant les produits fibrés de groupes et les produits fibrés de champs. Soient $f_1 : G_1 \to H$ et $f_2 : G_2 \to H$ deux morphismes de S-faisceaux en groupes. Le faisceau en groupes $G = (G_1 \times_H G_2)$, défini par $(G_1 \times_H G_2)(T) = G_1(T) \times_{H(T)} G_2(T)$, est un faisceau par l'exemple 2.1.3.7 et l'exercice 2.1.3.13. Considérons le foncteur fibré

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{T}ors(G) & \to & \mathcal{T}ors(G_1) \times_{\mathcal{T}ors(H)} \mathcal{T}ors(G_2) \\ P & \mapsto & (P \wedge^G G_1, P \wedge^G G_2, i). \end{array}$$

où i est la composée $(P \wedge^G G_1) \wedge^{G_1} H \xrightarrow{\sim} P \wedge^G H \xrightarrow{\sim} (P \wedge^G G_2) \wedge^{G_2} H$.

***Proposition* 2.2.2.13.** – *Ce foncteur $\mathcal{T}ors(G) \to \mathcal{T}ors(G_1) \times_{\mathcal{T}ors(H)} \mathcal{T}ors(G_2)$ est une équivalence de catégories fibrées si l'une des flèches $G_1 \to H$ ou $G_2 \to H$ est un épimorphisme de faisceaux.*

Démonstration. – On construit un foncteur dans l'autre sens de la manière suivante. Étant donné un triplet $(P_1, P_2, \phi : P_1 \wedge^{G_1} H \xrightarrow{\sim} P_2 \wedge^{G_2} H)$, on fabrique le produit fibré $P_1 \times_\phi P_2$, à l'aide des morphismes $P_1 \to P_2 \wedge^{G_2} H$ et $P_2 \to P_2 \wedge^{G_2} H$ définis respectivement sur les points par $p \mapsto \phi((p, 1))$ et $p \mapsto (p, 1)$. On le munit de l'action évidente de G à droite par propriété universelle du produit fibré. Enfin, on vérifie que c'est un pseudo-torseur, grâce aux mêmes propriétés de P_1 et P_2. Reste à vérifier que localement, le pseudo-torseur obtenu a un point. On peut donc se ramener au cas où $P_1 = G_1$, $P_2 = G_2$, et $G_1 \wedge^{G_1} H = G_2 \wedge^{G_2} H = H$. Le morphisme ϕ étant H équivariant à droite, il correspond alors à la multiplication à gauche par un point h de H. Par hypothèse, quitte à localiser encore, on peut supposer qu'il est l'image d'un point g de G_1 (resp. de G_2). Le point $(g, 1)$ (resp. $(1, g^{-1})$) est alors dans le produit fibré, qui est non vide. Cette construction est bien sûr fonctorielle, et le fait que le foncteur obtenu donne un inverse à isomorphisme près du précédent est laissé au lecteur. □

Cette équivalence nous permettra de décrire les torseurs sous des noyaux, ou sous des produits cartésiens de groupes, par exemple les torseur sous $\mathbf{SL}_n$ ou $\boldsymbol{\mu}_n$.