Panoramas & Synthèses
47, 2015, p. 1–14

LA RÈGLE DES SIGNES DE TITS

par

Michel Demazure

Résumé. – Cette note explicite la remarque 6.7 de l'exposé XXIII de SGA3 ([**5**], p. 322 et [**6**], p. 219), sous la forme d'une relecture des exposés XX et XXIII, à la lumière de l'article de Tits [**9**] cité dans cette remarque.

***Abstract* (Tits' sign rule).** – This note is an explicitation of remark 6.7 in *Exposé* XXIII of SGA3 ([**5**] et [**6**]). We will re-read *Exposés* XX and XXIII and recover Tits' commutation rule, as given in [**9**].

1. Introduction

Les deux percées dues à Chevalley, construisant les groupes semi-simples sur les corps finis ([**2**]), puis sur **Z** ([**3**]), sont basées sur l'existence de bases spécifiques des algèbres de Lie semi-simples complexes, dont les constantes de structure sont entières. De façon plus précise et avec les notations habituelles, Chevalley démontre qu'on peut choisir des éléments radiciels X_α de façon que les relations de commutation soient de la forme $[X_\alpha, X_\beta] = \pm p X_{\alpha+\beta}$, où p est un entier (en fait 1, 2, ou 3) déterminé par la position géométrique des racines α et β.

Cela ouvre le « problème des signes » : déterminer le signe des relations précédentes impliquerait l'unicité à isomorphisme près d'une algèbre de Lie de système de racines donné et même, *modulo* la vérification de l'identité de Jacobi, l'existence d'une telle algèbre. C'est ce programme que Tits mène à bien dans l'article [**9**].

En fait, cet article et la première édition de SGA3 sont contemporains (1964) et, à l'époque, j'ai bénéficié de nombreuses conversations avec Tits sur ce thème. Dans la mesure où toutes les constantes de structure des groupes déployés de rang 2 sont données explicitement dans l'exposé XXIII, il était clair que la *règle des signes* de Tits devait pouvoir se déduire de ces formules explicites, ce qui explique l'allusion

***Classification mathématique par sujets* (2010).** – 14L15, 14L30.
Mots clefs. – Règle des signes, constantes de structure, schémas de Chevalley.

faite dans la remarque 6.7 de cet exposé (avec la référence à **[9]**, complétée dans la seconde édition **[6]**). Ce qui suit est la solution de cet exercice.

Un mot d'histoire pour terminer. La convention $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$ était systématiquement utilisée par les spécialistes lorsque j'ai rédigé l'exposé XX et je me suis attaché à la respecter. Mais Tits a justement montré que ce choix ne permettait pas de résoudre le problème des signes et qu'il fallait prendre au contraire la convention $[X_{-\alpha}, X_\alpha] = H_\alpha$, qui s'est imposée par la suite (voir par exemple **[1]**, chap. VIII, §2, n° 4, définition 3). Comme je l'ai dit ci-dessus, je l'ai appris de lui lorsque je rédigeais l'exposé XXIII, mais il était alors trop tard pour modifier l'exposé XX déjà tapé, la production par dactylographie ne permettant pas ce genre de retouches *a posteriori* qui sont si simples maintenant. Je n'ai donc rien changé dans SGA3, mais j'ai modifié avec la « bonne » convention les formules dans le résumé qui a constitué officiellement ma thèse (**[4]**, soutenue en novembre 1964 et reproduite en tête de la réédition **[6]**).

Je remercie Patrick Polo et les *referees* pour leurs corrections et leurs suggestions.

2. Groupes de rang un

2.1. Notations générales. – Dans toute la suite, on note S un schéma, G un S-groupe réductif. On note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G ; c'est un $\mathscr{O}_S$-module localement libre, sur lequel G (et chacun de ses sous-groupes) opère par la représentation adjointe.

Pour éviter des circonlocutions inessentielles, nous supposerons S connexe et non vide, de façon à pouvoir identifier un S-schéma constant à l'ensemble de ses sections.

On note $\mathbf{O}$ le schéma en anneaux structural de S, de sorte que $\mathbf{G}_a = (\mathbf{G}_a)_S$ est le groupe additif de $\mathbf{O}$ et $\mathbf{G}_m = (\mathbf{G}_m)_S$ est le groupe multiplicatif de $\mathbf{O}$.

2.2. Groupes radiciels. – Supposons que G possède un tore maximal T (« défini sur S ») et une racine α relativement à T. Par définition, $\alpha : T \to \mathbf{G}_m$ est un caractère de T et le sous-espace propre $\mathfrak{g}_\alpha$ est localement libre de rang 1.

Alors, notant additivement le dual de T, le caractère $-\alpha$ est aussi une racine de G relativement à T.

On note Z_α le centralisateur du noyau de α. C'est un S-groupe réductif de rang 1, dont T est un tore maximal et dont l'algèbre de Lie est la somme directe

$$\mathfrak{g}_{-\alpha} \oplus \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}_\alpha.$$

Considérons le fibré vectoriel $W(\mathfrak{g}_\alpha)$ de rang 1 et l'application exponentielle $W(\mathfrak{g}_\alpha) \to Z_\alpha$ (voir SGA3, XX, 1.5, (i), page 38/29[(1)]). Elle induit un isomorphisme de $W(\mathfrak{g}_\alpha)$ sur un sous-groupe fermé de G, que l'on note U_α. On transporte à U_α la structure de $\mathbf{O}$-Module de $W(\mathfrak{g}_\alpha)$. Comme on note multiplicativement la structure

(1) Pour faciliter la lecture, les renvois à SGA3 sont accompagnés de « page x/y », où x est le numéro de la page de **[5]** et y le numéro de la page de **[6]**.

de groupe de G, donc de U_α, on notera exponentiellement l'opération externe de $\mathbf{O}$, de sorte qu'on aura notamment

$$tut^{-1} = u^{\alpha(t)},$$

pour tous points t et T et u de U_α (ici et dans la suite, l'expression « point » signifie : point à valeurs dans un S-schéma S' quelconque). On fait de même pour la racine opposée.

2.3. Structure. – On a alors (XX, 1.5, (ii), *ibidem*) :

Proposition 2.1. – *Le morphisme $(v, t, u) \mapsto v \cdot t \cdot u$ de $U_{-\alpha} \times T \times U_\alpha$ dans G induit un isomorphisme de $U_{-\alpha} \times T \times U_\alpha$ sur un sous-schéma ouvert Ω_α de Z_α.*

En outre (XX 2.5 formule (F), page 56/42, après changement de signe de l'accouplement) :

Théorème 2.2. – *Considérons le morphisme $(u, v) \mapsto u{\cdot}v$ de $U_\alpha \times U_{-\alpha}$ dans G. Il existe un accouplement $\mathbf{O}$-bilinéaire $U_\alpha \times U_{-\alpha} \to \mathbf{O}$, noté $(u, v) \to \langle u, v\rangle$, et un cocaractère $\alpha^* : \mathbf{G}_m \to T$, uniquement déterminés, tels que l'image réciproque de Ω_α par le morphisme précédent soit l'ouvert défini par la condition « $1 - \langle u, v\rangle$ est inversible » et qu'on ait alors, posant $z = 1 - \langle u, v\rangle$,*

$$u \cdot v = v^{z^{-1}} \cdot \alpha^*(z) \cdot u^{z^{-1}}. \tag{1}$$

On a $\langle \alpha^*, \alpha\rangle = 2$, c'est-à-dire $\alpha(\alpha^*(x)) = x^2$ pour tout point x de $\mathbf{G}_m$.

On dira que des points u de U_α et v de $U_{-\alpha}$ sont *appariés* si l'on a $\langle u, v\rangle = 1$. On notera que :

1. Cette normalisation diffère de celle de XX, 2.6.1, page 57/42, à cause du changement de signe. Elle mérite, vu les vertus que nous lui verrons ci-dessous, d'être appelée *normalisation de Tits.*
2. Du coup, l'appariement a une signification géométrique : si u et v sont appariés, $u \cdot v$ est « universellement hors de Ω_α ».
3. L'accouplement est « symétrique » : si on inverse les rôles de α et $-\alpha$, on a $\langle v, u\rangle = \langle u, v\rangle$ (XX, 2.9, page 57/43).
4. La version infinitésimale de l'appariement est la relation $[X_{-\alpha}, X_\alpha] = H_\alpha$ (cf. XX, 2.11, page 58/43).

Supposons donnés $u \in U_\alpha(S)$ et $v \in U_{-\alpha}(S)$, appariés. Alors u est «universellement non nul », donc le $\mathbf{O}$-Module U_α est libre de base u, ce qui l'identifie à $\mathbf{G}_a$ et de même pour $U_{-\alpha}$. On voit alors, comme dans XX, 5.8, page 77/56, qu'il existe un unique morphisme de S-groupes $f : (SL_2)_S \to G$ tel que

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = u, \quad f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right) = v \tag{2}$$

et on a, pour tout point z de $\mathbf{G}_m$

$$f\left(\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix}\right) = \alpha^*(z). \tag{3}$$

En outre, l'image de f est le groupe dérivé $S_\alpha = D(Z_\alpha)$ de Z_α. L'image de la coracine $\alpha^* : \mathbf{G}_m \to T$ est le tore maximal $T \cap S_\alpha$ de S_α. Le noyau de f est le noyau de α^* ; ainsi, pour que f induise un isomorphisme de $(SL_2)_S$ sur S_α ou, ce qui est équivalent, que S_α soit simplement connexe, il faut et il suffit que α^* soit indivisible dans M^*, c'est-à-dire n'appartienne pas à $2M^*$ (noter que α^* ne peut être divisible que par 2, puisque $(\alpha^*, \alpha) = 2$).

Un calcul brutal dans SL_2 donne :

Proposition 2.3. – *Supposons donnés deux sections appariées $u \in U_\alpha(S)$ et $v \in U_{-\alpha}(S)$. On a $uvu = vuv = f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$, $(uv)^3 = \alpha^*(-1)$ et $(uv)^6 = e$.*

Posons

$$w = uvu = vuv \in S_\alpha(S). \tag{4}$$

On notera que la normalisation de Tits implique que w « ne change pas lorsqu'on échange u et v », ce qui contraste avec XX, 3.1, (vi), page 60/45. C'est un point dans S du normalisateur de T dans Z_α et le quotient $N_{Z_\alpha}(T)/T$ est le S-groupe constant à deux éléments dont l'image de w est « l'autre section » (cf. XX, 3.1,*ibidem*) : on a

$$wtw^{-1} = s_\alpha(t) = t \cdot \alpha^*(\alpha(t)^{-1}) \tag{5}$$

pour tout point t de T.

De la proposition, on déduit tout le formulaire :

1. $w^2 = \alpha^*(-1)$, car $w^2 = (uvu)(vuv) = (uv)^3$,
2. $wuw^{-1} = v$, car $wu = (vuv)u = v(uvu) = vw$,
3. $wvw^{-1} = u$, *idem*,
4. $(wu)^3 = e$, car $wu = (vuv)u = (vu)^2$,
5. $(wv)^3 = e$, *idem.*

Notons aussi :

Proposition 2.4. – *Supposons u et v appariés et soit $w = uvu$. Soit a un point de $\mathbf{G}_m$. Alors u^a et $v^{1/a}$ sont appariés et l'on a $u^a v^{1/a} u^a = \alpha^*(a)w = w\alpha^*(1/a)$.*

Démonstration. On peut, soit faire le calcul dans $(SL_2)_S$, soit transformer la situation par un automorphisme intérieur déduit d'un point t de T, qui remplace u par $u^{\alpha(t)}$, v par $v^{1/\alpha(t)}$ et w par $twt^{-1} = twt^{-1}w^{-1}w = \alpha^*(\alpha(t))w$. □

En particulier, u^{-1} et v^{-1} sont appariés et donnent l'élément w^{-1}.

2.4. La trijection de Tits. – *Supposons α^* indivisible dans M^*.* Alors le cocaractère $\alpha^* : \mathbf{G}_m \to T$ est un monomorphisme et il résulte de la proposition 2.4 que l'application $u \mapsto w$ est injective. Il est donc équivalent de se donner :

1. la section u, base du $\mathbf{O}$-module U_α,
2. la section v, base du $\mathbf{O}$-module $U_{-\alpha}$,
3. la section w, de $N(T) \cap S_\alpha$,
4. le morphisme f.

L'équivalence des trois premières données est la *trijection* de Tits (proposition 1 de [**9**]). Nous l'utiliserons dans la suite dans le sens $w \mapsto u$.

Lorsque α^* est divisible (c'est-à-dire appartient à $2M^*$), alors le noyau du cocaractère $\alpha^* : \mathbf{G}_m \to T$ (qui est aussi le noyau de f), est égal à $\boldsymbol{\mu}_2$, on a $\alpha^*(-1) = -1$ et $w^{-1} = w$, de sorte que le couple (u, v) et le couple (u^{-1}, v^{-1}) donnent le même élément $w = w^{-1}$.

La connaissance de w ne permet alors de reconstituer que le couple d'inverses (u, u^{-1}). Mais on peut faire fonctionner la trijection sans hypothèse, à condition de « faire vivre » w dans $(SL_2)_S$ et non dans S_α. Nous reviendrons là-dessus dans 4.5.

3. Groupes de rang 2 : calcul de crochets

3.1. Notations et objectif. – Nous supposons désormais G déployé (XXII, 1.13, page 162/112). Ainsi, T est identifié au dual $D_S(M)$ d'un $\mathbf{Z}$-module libre M de rang fini, on dispose d'un système de racines $R \subset M$ dont le groupe de Weyl sera noté W et, pour chaque $\alpha \in R$, le $\mathcal{O}_S$-module $\mathfrak{g}_\alpha$ est libre de rang 1. On garde les notations de la section précédente, comme Z_α pour le centralisateur du noyau de $\alpha : T \to \mathbf{G}_m$ et S_α pour son groupe dérivé.

Pour simplifier l'exposition, nous supposerons que *toutes les coracines sont indivisibles*, ce qui est par exemple le cas si le groupe dérivé de G est simplement connexe, et nous utiliserons les trijections de Tits pour repérer les bases des modules libres $\mathfrak{g}_\alpha$.

Soit donc $\alpha \in R$ une racine et soit w_α une section de $N(T) \cap S_\alpha$ se projetant sur la symétrie $s_\alpha \in W$. Comme on l'a vu précédemment, il existe un unique couple de sections X et Y de $\mathfrak{g}_\alpha$ et $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ respectivement, donnant par exponentiation des sections appariées $u_\alpha = \exp(X)$ de U_α et $u_{-\alpha} = \exp(Y)$ de $U_{-\alpha}$, telles que

$$w_\alpha = u_\alpha u_{-\alpha} u_\alpha = u_{-\alpha} u_\alpha u_{-\alpha}.$$

On pose alors $X_\alpha(w_\alpha) = X$. Remarquons que si l'on échange les rôles de α et $-\alpha$, en conservant le même élément w_α, on a $X_{-\alpha}(w_\alpha) = Y$.

Rappelons au passage que $w_\alpha^2 = t_\alpha = \alpha^*(-1)$.

Pour pouvoir utiliser commodément les calculs de XXIII, qui utilisent des bases des systèmes de rang 2, nous emploierons dans la suite des lettres grecques pour noter les racines simples (une base étant choisie) et des lettres latines pour noter des racines quelconques, simples ou non.

L'objectif de cette section est le suivant. On considère deux racines $a \in R$ et $b \in R$ telles que $a+b$ soit une racine, une section w_a de $N(T) \cap S_a$ se projetant sur $s_a \in W$ et une section w_b de $N(T) \cap S_b$ se projetant sur $s_b \in W$, d'où on déduit des bases $X_a(w_a)$ et $X_b(w_b)$ de $\mathfrak{g}_a$ et $\mathfrak{g}_b$ respectivement. On se propose d'exprimer le crochet de Lie $[X_a(w_a), X_b(w_b)]$ sous la forme $mX_{a+b}(w_{a+b})$, où m est un entier et w_{a+b} une section convenable de $N(T) \cap S_{a+b}$.

On emploie la méthode suivante : on sait (XXI, 3.5.4, page 113/81) qu'il existe une base Δ de R contenant deux racines simples α et β telles que $a = \alpha$ et $b = x\alpha + y\beta$ pour deux entiers x et y positifs convenables. Le crochet à calculer peut alors s'extraire des formules données pour le groupe de rang 2 correspondant (XXIII, 3.2.1, 3.3.1 et 3.4.1).

Comme le fait Tits, nous symétriserons la question en introduisant la racine $c = -(a+b)$, de sorte qu'on aura $a+b+c=0$ et que la relation de commutation s'écrira

$$[X_a(w_a), X_b(w_b)] = mX_{-c}(w_c).$$

Un tel triplet de racines de somme nulle étant donné, on dispose de six permutations, ce qui donne naissance à six formules de commutation. Par ailleurs, comme on le verra ci-dessous, pour chaque tel triplet, l'une au moins des racines, disons par exemple a, est telle que s_a transforme b en $-c$, de sorte qu'on dispose d'un candidat pour w_c, à savoir $w_a w_b w_a^{-1}$. Ceci se produit suivant les cas, soit pour une seule des trois racines, soit pour les trois. Cela donne autant de formules candidates liant les éléments w, mais réduit d'autant le nombre de cas à étudier.

3.2. Cas de A_2. – C'est le type de triplet le plus simple, et le seul qui puisse intervenir lorsque toutes les racines ont la même longueur. Il est complètement symétrique. Nous référant au modèle du cas A_2 donné en XXIII, 3.2.1, page 287/192, le modèle de ce triplet est

A_2**:** $a = \beta, b = \alpha, c = -\alpha - \beta$

On a immédiatement (*loc. cit.* formule (iii))

$$[X_a(w_a), X_b(w_b)] = X_{-c}(w_a w_b w_a^{-1}) \qquad (A_2). \tag{6}$$

Une forme plus complète, faisant apparaître la symétrie ternaire entre a, b et c, est :

$$[X_a(w_a), X_b(w_b)] = X_{-c}(w_c), \qquad \text{avec } w_c w_a = w_a w_b = w_b w_c \qquad (A_2). \tag{7}$$

Posons en effet $w_c = w_a w_b w_a^{-1}$, de sorte que $w_c w_a = w_a w_b$. Il reste à prouver que $w_b w_c = w_a w_b$. Mais on a $w_b w_c w_b^{-1} w_a^{-1} = w_b(w_a w_b w_a^{-1}) w_b^{-1} w_a^{-1} = w_b w_a w_b w_a t_a w_b t_b w_a t_a = (w_b w_a)^3 s_a(s_b(t_a) t_b) t_a$, cette dernière égalité étant obtenue par application de la formule (5). Comme on a $(w_b w_a)^3 = e$ (*loc. cit.*, formule (i)) et $s_a(s_b(t_a)t_b) = s_a(t_{a+b} t_b) = s_a(t_a) = t_a$, on obtient bien $w_b w_c w_b^{-1} w_a^{-1} = e$.

Remarque 3.1 - On a donc $w_b w_a w_b = w_b w_c w_a = w_a w_b w_a$, soit $w_\alpha w_\beta w_\alpha = w_\beta w_\alpha w_\beta$. Voir plus loin la proposition 4.1.

On déduit des relations (7) deux autres versions de (6) :

$$[X_a(w_b w_c w_b^{-1}), X_b(w_b)] = X_{-c}(w_c) \qquad (A_2), \tag{8}$$

$$[X_a(w_a), X_b(w_c w_a w_c^{-1})] = X_{-c}(w_c) \qquad (A_2). \tag{9}$$

3.3. Cas de B_2. – On a une seule configuration à permutation près, formée de deux racines courtes symétriques par rapport à la troisième, qui est longue. Cela donne trois possibilités suivant la place de la racine longue dans la liste. Se référant au modèle de B_2 donné en XXIII, 3.3.1, page 291/194, où la racine simple longue est β, ce sont :

B_2, long, court, court: $a = \beta, b = \alpha, c = -\alpha - \beta$,
B_2, court, long, court: $a = \alpha, b = \beta, c = -\alpha - \beta$,
B_2, court, court, long: $a = \alpha + \beta, b = \alpha, c = -2\alpha - \beta$.

Le premier cas donne immédiatement (*loc. cit.*, première formule de (iii)) :

$$[X_a(w_a), X_b(w_b)] = X_{-c}(w_a w_b w_a^{-1}) \qquad (B_2, \text{[lcc]}). \tag{10}$$

Dans le second cas, en inversant le crochet de cette même formule de *loc. cit.*, on obtient $[X_a(w_a), X_b(w_b)] = [X_\alpha(w_\alpha), X_\beta(w_\beta)] = X_c(w_c)$, avec (noter le changement de signe par inversion de l'exposant) $w_c = w_\beta w_\alpha^{-1} w_\beta^{-1}$. Mais on a $w_b w_c w_b^{-1} = w_\beta w_c w_\beta^{-1} = t_\beta w_\alpha^{-1} t_\beta = w_\alpha^{-1} s_\alpha(t_\beta) t_\beta = w_\alpha^{-1} t_\alpha = w_\alpha = w_a$, ce qui donne :

$$[X_a(w_b w_c w_b^{-1}), X_b(w_b)] = X_{-c}(w_c) \qquad (B_2, \text{[clc]}). \tag{11}$$

Le troisième cas se lit sur la deuxième formule de *loc. cit.*, (iii) : on a $[X_a(w_a), X_b(w_b)] = 2X_{-c}(w_c)$ avec $w_a = w_\beta w_\alpha w_\beta^{-1}$, $w_b = w_\alpha$ et $w_c = w_\alpha w_\beta w_\alpha^{-1}$. Prouvons qu'on a $w_c w_a = w_b w_c$, ce qui donnera :

$$[X_a(w_a), X_b(w_c w_a w_c^{-1})] = 2\, X_{-c}(w_c) \qquad (B_2, \text{[ccl]}). \tag{12}$$

On a d'une part $w_b w_c = w_\alpha^2 w_\beta w_\alpha^{-1} = w_\beta w_\alpha$, car $w_\alpha^2 = t_\alpha$ est central. De l'autre, $w_c w_a = (w_\alpha w_\beta w_\alpha t_\alpha)(w_\beta w_\alpha w_\beta t_\beta) = (w_\alpha w_\beta)^3 t_\alpha t_\beta$. Comme on sait par *loc. cit.* (i) que $(w_\alpha w_\beta)^4 = t_\alpha$, on en déduit $w_c w_a = w_\beta^{-1} w_\alpha^{-1} t_\beta = w_\beta t_\beta w_\alpha t_\alpha t_\beta = w_\beta w_\alpha$, ce qui achève la démonstration.

3.4. Cas de G_2. – On a trois configurations (trois racines longues, deux racines courtes et une racine longue, trois racines courtes). Cela donne en tout cinq possibilités. Nous référant au modèle de G_2 donné en XXIII, 3.4.1, page 295/196, ce sont :

G_2, long, court, court: $a = \beta, b = \alpha, c = -\alpha - \beta$,
G_2, court, long, court: $a = \alpha, b = \beta, c = -\alpha - \beta$,
G_2, court, court, long: $a = 2\alpha + \beta, b = \alpha, c = -3\alpha - \beta$,
G_2, long, long, long: $a = \beta, b = 3\alpha + \beta, c = -3\alpha - 2\beta$,
G_2, court, court, court: $a = \alpha + \beta, b = \alpha, c = -2\alpha - \beta$.

Pour faciliter l'écriture, nous poserons $\gamma = \alpha + \beta$, $\delta = 2\alpha + \beta$, $\epsilon = 3\alpha + \beta$ et $\lambda = 3\alpha + 2\beta$, avec $w_\gamma = w_\beta w_\alpha w_\beta^{-1}$, $w_\delta = w_\alpha w_\gamma w_\alpha^{-1}$, $w_\epsilon = w_\alpha w_\beta^{-1} w_\alpha^{-1}$ et $w_\lambda = w_\beta w_\epsilon w_\beta^{-1}$.

Le premier cas donne directement (*loc. cit.*, première formule de (iii))

$$[X_a(w_a), X_b(w_b)] = X_{-c}(w_a w_b w_a^{-1}) \qquad (G_2,\ [\mathrm{lcc}]). \tag{13}$$

Le second cas se traite comme dans le cas analogue de B2 : on renverse le commutateur précédent et on obtient $[X_a(w_a), X_b(w_b)] = [X_\alpha(w_\alpha), X_\beta(w_\beta)] = X_c(w_c)$, avec $w_c = w_\beta w_\alpha^{-1} w_\beta^{-1}$. Et exactement le même calcul que plus haut donne $w_b w_c w_b^{-1} = w_a$, soit :

$$[X_a(w_b w_c w_b^{-1}), X_b(w_b)] = X_{-c}(w_c) \qquad (G_2,\ [\mathrm{clc}]). \tag{14}$$

La troisième relation de *loc. cit.* s'écrit $[X(w_\delta), X(w_\alpha)] = 3X(w_\epsilon)$. Mais on a $w_\epsilon w_\delta w_\epsilon^{-1} = (w_\alpha w_\beta^{-1} w_\alpha^{-1})(w_\alpha w_\beta w_\alpha w_\beta^{-1} w_\alpha^{-1})(w_\alpha w_\beta w_\alpha^{-1}) = w_\alpha$, ce qui donne

$$[X_a(w_a), X_b(w_c w_a w_c^{-1})] = 3\, X(w_c) \qquad (G_2,\ [\mathrm{ccl}]). \tag{15}$$

Le quatrième cas relève de la cinquième relation de *loc. cit.*, (iii), en renversant le commutateur, à savoir $[X_\beta(w_\beta), X_\epsilon(w_\epsilon)] = X_\lambda(w_\lambda) = X_{s_\beta(\epsilon)}(w_\beta w_\epsilon w_\beta^{-1})$, soit $[X_a(w_a), X_b(w_b)] = X_{-c}(w_a w_b w_a^{-1})$, ce qui n'est guère surprenant, puisque les racines longues forment un système de type A_2. On aura donc, comme plus haut, la forme symétrique :

$$[X_a(w_a), X_b(w_b)] = X_{-c}(w_c), \qquad \text{avec } w_c w_a = w_a w_b = w_b w_c \qquad (G_2,\ [\mathrm{lll}]).$$

Le dernier cas relève de la deuxième relation de *loc. cit.* (iii), en renversant le commutateur, à savoir $[X_\alpha(w_\alpha), X_\gamma(w_\gamma)] = -2X_\delta(w_\delta) = -2X_{s_\alpha(\gamma)}(w_\alpha w_\gamma w_\alpha^{-1})$, soit

$$[X_a(w_a), X_b(w_b)] = -2\, X_{-c}(w_a w_b w_a^{-1}) \qquad (G_2,\ [\mathrm{ccc}]). \tag{16}$$

Ici encore, nous avons une symétrie ternaire. On a par construction $w_a w_b = w_c w_a$. Un calcul que nous laissons en exercice au lecteur, basé sur la relation $(w_\beta w_\alpha)^6 = e$ de *loc. cit.* (i), donne $w_b w_c = w_c w_a$, de sorte qu'on a

$$[X_a(w_a), X_b(w_b)] = -2X_{-c}(w_c), \qquad \text{avec } w_c w_a = w_a w_b = w_b w_c \qquad (G_2,\ [\mathrm{ccc}]).$$

3.5. Moralité. – En définitive, les résultats obtenus peuvent se résumer ainsi. Supposons données trois racines a, b et c de somme nulle. Alors de deux choses l'une. Ou bien l'une d'entre elles est longue, disons a, les deux autres sont courtes, disons b et c, et on a alors $s_a(\pm b) = \mp c$. Ou bien les trois ont la même longueur et on a alors les trois relations $s_a(b) = -c$, $s_b(c) = -a$ et $s_c(a) = -b$.

Supposons donnés $w_a \in S_a(S)$ représentant s_a et de même w_b et w_c. Alors :

***Proposition 3.2* (Tits).** – *Imposons $w_c w_a = w_a w_b$ si s_a échange b et $-c$, $w_a w_b = w_b w_c$ si s_b échange c et $-a$, et $w_b w_c = w_c w_a$ si s_c échange a et $-b$ (ces trois conditions sont compatibles lorsque les trois hypothèses sont simultanément réalisées, ce qui est le cas lorsque les trois racines ont la même longueur). On a alors*

$$[X_a(w_a), X_b(w_b)] = \epsilon\, f(a,b)\, X_{-c}(w_c), \tag{17}$$

où $f(a,b)$ est le plus petit entier $f > 0$ tel $b - fa$ ne soit pas racine et où ϵ vaut 1, sauf dans le cas de trois racines courtes d'un facteur de type G_2, auquel cas il vaut -1.

On constate en effet que dans chacun des cas ci-dessus, le coefficient est $\pm f(a,b)$, avec la règle de signe indiquée. La relation précédente explicite ainsi le signe $\pm$ de la « règle de Chevalley » de XXIII, 6.5, page 322/212.

4. Le groupe de Weyl étendu

On suppose désormais donné un épinglage du S-groupe déployé G (XXIII, 1.1, page 263/177). On dispose donc d'une base Δ de R, et pour chaque $\alpha \in \Delta$, d'une base X_α de $\mathfrak{g}_\alpha$.

Pour chaque racine simple α, on déduit de X_α une base $u_\alpha = \exp(X_\alpha)$ du $\mathbf{O}$-module U_α et une section w_α du normalisateur $N(T)$ de T, dont l'image dans le groupe de Weyl $W = N(T)/T$ est la réflexion s_α relativement à la racine α.

4.1. Construction de W^*. – Par hypothèse, le S-tore T provient du $\mathbf{Z}$-tore $T_0 = D(M)$. Le groupe $T_0(\mathbf{Z})$ des sections de T_0 s'identifie à $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(M, \mathbf{Z}^\times)$, c'est-dire à $M^*/2M^*$, où M^* est le $\mathbf{Z}$-module dual de M. L'homomorphisme composé

$$h : M^* \to M^*/2M^* \to T_0(\mathbf{Z}) \to T(S)$$

envoie un cocaractère $\phi \in M^*$ de T sur le point $\phi(-1) \in T(S)$. En particulier, pour chaque racine simple α, la classe de la coracine α^* est envoyée sur l'élément $t_\alpha = \alpha^*(-1) = w_\alpha^2$ de $T(S)$. On notera Θ le sous-groupe de $T(S)$ engendré par les t_α. C'est l'image par h du réseau des coracines.

Soient α et β deux racines simples. Notons n l'ordre de l'élément $s_\alpha s_\beta$ de W (n vaut donc 1 si $\alpha = \beta$ et sinon 2, 3, 4 ou 6). Alors $(w_\alpha w_\beta)^n$ appartient à Θ d'après les relations $w_\alpha^2 = t_\alpha$ et les parties (i) de XXIII, 3.1.2, 3.2.1, 3.3.1 et 3.4.1 : c'est t_α pour $n = 1$ et $n = 4$, c'est $t_\alpha t_\beta$ pour $n = 2$, et c'est l'identité pour $n = 3$ et $n = 6$.

On notera W^* le groupe engendré par les w_α. C'est un sous-groupe de $N(T)(S)$ et la projection $W^* \to W$ est surjective. D'après la description de W par générateurs et relations (XXI, théorème 5.1, page 121/86, voir aussi [**1**], chap. V, §3, n° 2, théorème 1), le noyau de cette projection est Θ. On l'appellera le *groupe de Weyl étendu* du groupe épinglé G (*confer.* [**8**], §4.6).

On notera que W^* dépend effectivement de la donnée radicielle complète de G et pas seulement du système de racines R.

1. Si G est semi-simple, simplement connexe et si $2 \cdot 1_S \neq 0$, alors Θ s'identifie à $T_0(\mathbf{Z})$ et W^* au groupe des points entiers du normalisateur N_0 de T_0 dans le $\mathbf{Z}$-groupe semi-simple épinglé G_0 d'où provient G (proviendra lorsqu'on aura démontré unicité et existence).
2. À l'opposé, si $2 \cdot 1_S = 0$, alors $\Theta = \{e\}$ et W^* s'identifie à W.

4.2. Une parenthèse : les relations de tresses. – Gardons les notations précédentes. On doit à Tits ([**8**], Th. 4.4) une forme particulièrement jolie des relations du groupe de Weyl étendu :

Proposition 4.1. – *Soient α et β deux racines simples, w_α et w_β les sections correspondantes de $N(T)$. Soit n $(1, 2, 3, 4$ ou $6)$ l'ordre de l'élément $s_\alpha s_\beta$ du groupe de Weyl. Les deux produits alternés à n termes $w_\alpha w_\beta w_\alpha \cdots$ et $w_\beta w_\alpha w_\beta \cdots$ sont égaux.*

Nous n'utiliserons pas ce résultat, mais nous le mentionnons parce qu'il se déduit, lui aussi, des formules explicites de XXIII. D'ailleurs, c'est sous cette forme qu'auraient du être énoncées les parties (i) de XXIII, 3.1.2, 3.2.1, 3.3.1 et 3.4.1. Mais, cela aussi, je l'ai appris de Tits après la rédaction de cet exposé.

On peut donner plusieurs démonstrations. La plus raisonnable serait de reprendre les calculs de XXIII, *mutatis mutandis*. Comme me l'a indiqué le *referee*, c'est la voie suivie par Springer dans [**7**] (11.2.8 dans la première édition et 9.3.2 dans la seconde).

On peut aussi déduire cette jolie forme de la forme plus grossière donnée dans XXIII. Pour $n = 2$, c'est directement XXIII, lemme 3.1.1 (ii). Pour $n = 3$, c'est démontré dans la remarque 3.1 ci-dessus. Pour $n = 4$, la relation démontrée dans XXIII, 3.3.1 est $(w_\alpha w_\beta)^4 = t_\alpha$ (α étant la racine simple courte), ce qui donne $w_\alpha w_\beta w_\alpha w_\beta = w_\beta^{-1} w_\alpha^{-1} w_\beta^{-1} w_\alpha$. On écrit alors

$$w_\beta^{-1} w_\alpha^{-1} w_\beta^{-1} = w_\beta w_\alpha \left(t_{s_\alpha(\beta)} t_\alpha\right) w_\beta^{-1} = w_\beta w_\alpha t_\beta w_\beta^{-1} = w_\beta w_\alpha w_\beta.$$

Le cas $n = 6$ est un excellent exercice.

La voie suivie par Tits dans [**8**] comporte une réduction difficile du cas général au cas où G est semi-simple et simplement connexe. Plaçons-nous dans ce cas. Les deux membres de la relation de tresses se projettent sur le même élément du groupe de Weyl, donc diffèrent (multiplicativement) par une section de T. Prenons pour fixer les idées le cas $n = 6$ et écrivons

$$w_\alpha w_\beta w_\alpha w_\beta w_\alpha w_\beta = t w_\beta w_\alpha w_\beta w_\alpha w_\beta w_\alpha. \tag{18}$$

Il s'agit de prouver que $t = e$. Posant $n = w_\beta w_\alpha w_\beta w_\alpha w_\beta$, cela s'écrit $w_\alpha n = t n w_\alpha$, soit $t = w_\alpha n w_\alpha^{-1} n^{-1}$. Projetant la relation dans W et notant $w \in W$ l'image de n, on voit que $w s_\alpha w^{-1} = s_\alpha$, donc $w(\alpha) = \pm\alpha$. Rappelons que w_α est par hypothèse une section de $S_\alpha \cap N(T)$. Puisque l'automorphisme intérieur $\operatorname{int}(n)$ envoie S_α dans S_α, il en résulte que w_α et $n w_\alpha^{-1} n^{-1}$ sont toutes deux des sections de S_α, de sorte que t est une section de $S_\alpha \cap T$ (qui est l'image du cocaractère $\alpha^* : \mathbf{G}_m \to T$).

Écrivant maintenant (18) sous la forme $w_\beta w_\alpha \cdots = t^{-1} w_\alpha w\beta \cdots$ et raisonnant de la même façon, on voit que t est aussi une section de $S_\beta \cap T$. On a donc terminé si l'on prouve qu'on a $S_\alpha \cap S_\beta \cap T = e$. Or c'est bien le cas si G est semi-simple et simplement connexe, car l'homomorphisme $\mathbf{G}_m^2 \to T$ de composantes α^* et β^* est un monomorphisme, puisqu'alors α^* et β^* font partie d'une base du groupe des cocaractères de T.

Indiquons que le raisonnement précédent se trouve aussi (dans le contexte des groupes de Lie réels compacts simplement connexes) dans l'exercice 12 de [**1**], chap. IX, §4.

Notons enfin qu'on déduit de la proposition 4.1 et de [**1**], chap. IV, §1, n° 5, proposition 5 :

Corollaire 4.2. – *La projection $W^* \to W$ possède une section $\phi : W \to W^*$, uniquement déterminée, telle que, pour tout élément $w \in W$ et toute décomposition réduite $w = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_r}$, on ait $\phi(w) = w_{\alpha_1} \cdots w_{\alpha_r}$.*

On trouvera dans l'exercice cité ci-dessus des propriétés supplémentaires de cette section.

4.3. Double système de Chevalley. – Soit maintenant a une racine positive, simple ou non. Choisissons un élément w du groupe de Weyl et une racine simple α tels que $a = w(\alpha)$, donc $s_a = ws_\alpha w^{-1}$. Relevons w en un élément n du groupe de Weyl étendu. Alors l'automorphisme intérieur $\mathrm{int}(n)$ normalise T et transforme la racine α en la racine a, donc le groupe S_α en le groupe S_a. Posons alors $X_a = \mathrm{ad}(n)X_\alpha \in \mathfrak{g}_a$, $u_a = \exp(X_a) = nu_\alpha n^{-1} \in U_a$ et $w_a = nw_\alpha n^{-1} \in W^* \cap S_a(S)$. Alors X_a est une base de $\mathfrak{g}_a$, u_a la base correspondante de U_a et w_a la section correspondante de $N(T) \cap S_a(S)$.

Proposition 4.3. – *Au signe près, la valeur de X_a ne dépend pas des choix faits (α et n).*

C'est exactement ce qui est démontré en XXIII, page 318/210, dans la preuve de la proposition 6.2 : il faut essentiellement vérifier (XXIII, lemme 6.3, page 319/211) que si a est une racine simple, on retombe bien au signe près sur l'élément X_a de l'épinglage.

Ainsi, on déduit de l'épinglage la donnée d'un couple de bases opposées de $\mathfrak{g}_a$ pour tout $a \in R$, cette donnée étant invariante pour l'action de W^*. Suivant Tits ([**9**] §2.9) et XXIII, 6.1, page 319/211, nous la baptiserons *double système de Chevalley*. De manière équivalente, on dispose pour tout $a \in R$ de deux bases opposées de U_a et de deux éléments inverses l'un de l'autre de $W^* \cap S_a(S)$ relevant la réflexion s_a. On notera $X_a(w_a)$ et $u_a(w_a)$ les éléments correspondant à w_a.

On peut récrire avec cette notation les relations de commutation de XXIII. Donnons à titre d'exemple la formule la plus compliquée (XXIII, 3.4.1, (iii), première relation). Nous allégeons la notation en écrivant $u(w_a)$ au lieu de $u_a(w_a)$; cela n'est pas ambigu, puisque la connaissance de w_a permet de retrouver s_a, donc la racine a (toutes les racines considérées sont positives).

$$\begin{aligned} u(w_\beta)^y u(w_\alpha)^x = u(w_\alpha)^x u(w_\beta)^y \, u(w_\beta w_\alpha w_\beta^{-1})^{xy} \, u(w_\alpha w_\beta w_\alpha w_\beta^{-1} w_\alpha^{-1})^{x^2 y} \\ u(w_\alpha w_\beta^{-1} w_\alpha^{-1})^{x^3 y} \, u(w_\beta w_\alpha w_\beta^{-1} w_\alpha^{-1} w_\beta^{-1})^{x^3 y^2}. \end{aligned}$$

Notons enfin que si l'on choisit une autre base de R, soit Δ', si l'on fabrique un épinglage en choisissant pour chaque racine de Δ' l'un des deux éléments correspondants du double système de Chevalley, alors le groupe de Weyl étendu et le double système de Chevalley construits à partir de ce nouvel épinglage seront les mêmes que ceux construits initialement.

4.4. La règle des signes de Tits. – L'introduction du groupe de Weyl étendu et des doubles systèmes de Chevalley permet de formuler la jolie version symétrique de la proposition 3.2 que Tits donne dans le paragraphe 2.9 de [**9**].

Pour chaque racine $a \in R$, notons $M_a \subset W^*$ l'ensemble des deux éléments $w_a^{\pm 1}$ correspondants ; ce sont deux représentants de la réflexion $s_a \in W$.

Notons Ψ l'ensemble des triplets (m_a, m_b, m_c) d'éléments de W^* tels qu'il existe trois racines a, b, c de somme nulle, avec $m_a \in M_a$, $m_b \in M_b$ et $m_c \in M_c$ respectivement.

***Théorème 4.4* (Tits).** – a) *Il existe une unique application* $\varepsilon : \Psi \to \{-1, 1\}$ *satisfaisant aux trois propriétés suivantes :*

(i) ε *est invariante par permutation circulaire : on a*

$$\varepsilon(m_a, m_b, m_c) = \varepsilon(m_b, m_c, m_a),$$

(ii) ε *est « $\mathbf{Z}^\times$-équivariante » : on a*

$$\varepsilon(m_a^{-1}, m_b, m_c) = \varepsilon(m_a, m_b^{-1}, m_c) = \varepsilon(m_a, m_b, m_c^{-1}) = -\varepsilon(m_a, m_b, m_c),$$

(iii) *si* m_a *et* m_b *sont deux éléments de* W^* *avec* $(m_a, m_b, m_a m_b m_a^{-1}) \in \Psi$*, alors* $\varepsilon(m_a, m_b, m_a m_b m_a^{-1})$ *vaut* 1*, sauf dans le cas où* a *et* b *(et donc aussi* $c = -a - b$*) sont des racines courtes d'un facteur de type* G_2*, auquel cas il vaut* -1.

b) *Soit* $(m_a, m_b, m_c) \in \Psi$*, donc se projetant sur* $(s_a, s_b, s_c) \in W^3$ *avec* $a+b+c = 0$*. On a*

$$[X_a(m_a), X_b(m_b)] = \varepsilon(m_a, m_b, m_c)\, f(a, b)\, X_{-c}(m_c), \tag{19}$$

où $f(a, b)$ *est l'entier défini dans la proposition* 3.2.

Démonstration. Notons d'abord que les relations (19) définissent une application $\varepsilon : \Psi \to \mathbf{Q}$, uniquement déterminée, d'ailleurs évidemment $\mathbf{Z}^\times$-équivariante.

Choisissons $w_a \in M_a$, $w_b \in M_b$ et $w_c \in M_c$ satisfaisant aux hypothèses de la proposition 3.2. Notons que ces hypothèses sont invariantes par permutation circulaire de a, b et c et soit $\epsilon = \pm 1$ le signe donné dans cette proposition. On a $m_a = w_a^{\varepsilon_a}$, avec $\varepsilon_a = \pm 1$ et de même pour m_b et m_c. La proposition donne alors $\varepsilon(m_a, m_b, m_c) = \epsilon \varepsilon_a \varepsilon_b \varepsilon_c$, ce qui prouve l'invariance de $\varepsilon(m_a, m_b, m_c)$ par permutation circulaire.

Sous l'hypothèse de (iii), on aurait pu prendre $w_a = m_a$, $w_b = m_b$ et $w_c = m_a m_b m_a^{-1}$, ce qui donne $\varepsilon(m_a, m_b, m_a m_b m_a^{-1}) = \epsilon$.

Enfin, l'assertion d'unicité dans a) est claire : pour calculer $\varepsilon(m_a, m_b, m_c)$, la condition (i) permet de se ramener au cas où $s_a(b) = -c$, donc $m_a m_b m_a^{-1} = m_c^{\pm 1}$, et de conclure par (ii) et (iii). $\square$

4.5. Remarques finales. – Nous avons supposé que les coracines étaient indivisibles pour faire fonctionner les trijections de Tits. Mais cette hypothèse n'est pas essentielle.

On peut évidemment remarquer (une fois qu'on dispose des théorèmes d'existence et d'unicité) que pour calculer les relations de commutation de $\mathfrak{g}$, il suffit de le faire dans le cas du groupe semi-simple simplement connexe de même système de racines, dont les coracines sont indivisibles.

Mais en fait, l'hypothèse est inutile si on définit de façon adéquate le groupe de Weyl étendu. Notons en effet que nous sommes passés des formules de XXIII aux formules de commutation par des allers et retours à travers ces trijections. Par exemple, nous avons transformé la relation non ambiguë

$$[X_\beta, X_\alpha] = w_\beta X_\alpha w_\beta^{-1}$$

en la relation

$$[X(w_\beta), X(w_\alpha)] = X(w_\beta w_\alpha w_\beta^{-1})$$

qui est ambiguë lorsque que les trijections ne fonctionnent pas.

Définissons donc un groupe $\mathscr{W}^*$ de façon abstraite, comme le fait Tits ([**8**], §4.6). Notons Γ le réseau des coracines et soit Θ le groupe quotient $\Gamma^*/2\Gamma^*$ (dont nous noterons la loi multiplicativement). Pour chaque racine α, notons $t_\alpha \in \Theta$ la classe de α^*, de sorte que $t_\alpha^2 = e$. On peut alors définir le groupe $\mathscr{W}^*$ comme engendré par Θ et des éléments $w_\alpha, \alpha \in \Delta$, agissant sur Θ comme il se doit ($w_\alpha t w_\alpha^{-1} = s_\alpha(t)$) et soumis aux mêmes relations que ci-dessus (donnant les $(w_\alpha w_\beta)^n$ en fonction des t_α). Le groupe $\mathscr{W}^*$ s'envoie naturellement sur W^*, donc opère comme précédemment, et par le même raisonnement que plus haut, utilisant XXI, théorème 5.1, page 121/86 (ou [**1**], chap. V, §3, n° 2, théorème 1), on voit que la projection $\mathscr{W}^* \to W$ a comme noyau Θ.

Nous venons en fait de reconstituer le groupe des points entiers du normalisateur du tore maximal dans le **Z**-groupe déployé semi-simple simplement connexe de système de racines R.

L'homomorphisme surjectif $\mathscr{W}^* \to W^*$ n'est pas toujours bijectif. Mais, du coup, si l'on prend les w_a dans $\mathscr{W}^*$ et non plus dans W^*, la trijection de Tits peut s'appliquer, car t_α n'est pas l'identité, et tous les calculs faits précédemment et tous les énoncés restent identiquement valables avec cette nouvelle interprétation des w_α et des t_α.

Références

[1] N. Bourbaki – *Groupes et algèbres de Lie*, chap. 4–6, 7–9, Hermann, 1968, 1975, et Masson, 1982.

[2] C. Chevalley – « Sur certains groupes simples », *Tohoku Math. J.* **7** (1955), p. 14–66.

[3] ______, « Certains schémas de groupes semi-simples », in *Séminaire Bourbaki, Vol. 6*, Soc. Math. France, Paris, 1995, p. Exp. No. 219, 219–234.

[4] M. Demazure – « Schémas en groupes réductifs », *Bull. Soc. Math. France* **93** (1965), p. 369–413.

[5] M. Demazure & A. Grothendieck – *Schémas en groupes III*, Lecture Notes in Math., vol. 153, Springer, 1970.

[6] ———, *Schémas en groupes III*, Lecture Notes in Math., vol. 153, Springer, 1970, réédition : *Documents Mathématiques* **7, 8**, Société Mathématique de France, 2011.

[7] T. A. Springer – *Linear algebraic groups*, 2e éd., Birkhäuser, 1998.

[8] J. Tits – « Normalisateurs de tores. I. Groupes de Coxeter étendus », *J. Algebra* **4** (1966), p. 96–116.

[9] ———, « Sur les constantes de structure et le théorème d'existence des algèbres de Lie semi-simples », *Publ. Math. IHÉS* **31** (1966), p. 21–58.

Michel Demazure, 127, rue Anatole France, 37540 Saint-Cyr sur Loire, France
E-mail : michel@demazure.com

Panoramas & Synthèses
47, 2015, p. 15–38

GROUP SCHEMES OUT OF BIRATIONAL GROUP LAWS, NÉRON MODELS

by

Bas Edixhoven & Matthieu Romagny

Abstract. – In this note, we present the theorem of extension of birational group laws in both settings of classical varieties (Weil) and schemes (Artin). We improve slightly the original proof and result with a more direct construction of the group extension, a discussion of its separation properties, and the systematic use of algebraic spaces. We also explain the important application to the construction of Néron models of abelian varieties. This note grew out of lectures given by Ariane Mézard and the second author at the Summer School "Schémas en groupes" held in the CIRM (Luminy) from 29 August to 9 September, 2011.

***Résumé* (Schémas de groupes obtenus à partir de lois de groupe birationnelles, modèles de Néron)**
Dans cette note, nous présentons le théorème d'extension d'une loi de groupe birationnelle en un groupe algébrique, dans le cadre des variétés algébriques classiques (Weil) et des schémas (Artin). Nous améliorons légèrement le résultat original et sa preuve en donnant une construction plus directe du groupe, en apportant des compléments sur ses propriétés de séparation, et en utilisant systématiquement les espaces algébriques. Nous expliquons aussi l'application importante à la construction des modèles de Néron des variétés abéliennes. Cette note est issue des cours donnés par Ariane Mézard et le second auteur à l'École d'été « Schémas en groupes » qui s'est tenue au CIRM (Luminy) du 29 août au 9 septembre 2011.

1. Introduction

This paper is devoted to an exposition of the generalization to group schemes of Weil's theorem in [**19**] on the construction of a group from a birational group law, as can be found in Artin's Exposé XVIII in SGA3 [**2**]. In addition, we show how this theorem is used by Néron in order to produce canonical smooth models (the famous *Néron models*) of abelian varieties.

The content of Weil's theorem is to extend a given "birational group law" on a scheme X to an actual multiplication on a group scheme G birational to X. The

2010 Mathematics Subject Classification. – 14L15, 11G05, 11G10, 14K99.
Key words and phrases. – Group scheme, birational group law, Néron model.