PANORAMAS ET SYNTHÈSES 0

SÉRIES DIVERGENTES ET THÉORIES ASYMPTOTIQUES

Jean-Pierre Ramis

Société Mathématique de France 1993

Publié avec le concours du Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche.

SÉRIES DIVERGENTES ET THÉORIES ASYMPTOTIQUES

Jean-Pierre Ramis

Cette monographie est consacrée à un très vieux sujet et à quelques uns de ses nombreux développements récents. Dans une première partie, nous dégagerons l'efficacité théorique et pratique de l'utilisation des séries divergentes sur quelques exemples historiques. La seconde partie sera consacrée aux fondements rigoureux de la théorie des séries divergentes, dont on dispose aujourd'hui grâce à des progrès très récents et à ses relations avec la théorie des développements asymptotiques. Nous terminerons par quelques applications aux systèmes dynamiques algébriques ou analytiques.

SÉRIES DIVERGENTES ET THÉORIES ASYMPTOTIQUES

Jean-Pierre RAMIS

Break on through to the other side.
Jim Morrison

...all prohibitions are made only to be broken, must be broken.
A.S. Byatt, *Possession*

INTRODUCTION

Ces deux exposés[1] sont consacrés à un très vieux sujet et à quelques uns de ses nombreux développements récents.

• Dans une première partie, nous dégagerons l'efficacité théorique et pratique de l'utilisation des séries divergentes sur quelques exemples historiques.

• La seconde partie sera consacrée aux fondements rigoureux de la théorie des séries divergentes, dont on dispose aujourd'hui grâce à des progrès très récents[2] et à ses relations avec la théorie des développements asymptotiques.

• Nous terminerons — dans la troisième partie — par quelques applications aux systèmes dynamiques algébriques (ou analytiques).

---

[1] Ce texte est issu de deux exposés donnés par l'auteur aux journées X-UPS en 1991. Une première version est parue dans les Prépublications du Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique.

[2] L'exposé de cette théorie est — depuis peu — possible avec des outils mathématiques élémentaires et classiques. Les démonstrations restent souvent longues, techniques et délicates et nécessitent quelques instruments récents qu'il est impossible d'exposer ici.

1. PETITE HISTOIRE DES SÉRIES DIVERGENTES

Il ne s'agit pas de développer un historique complet de l'utilisation des séries divergentes en mathématiques (ce travail reste à faire), mais d'expliquer sur quelques exemples l'intérêt du sujet, de constater l'efficacité de cette utilisation, tout en dégageant quelques méthodes et en préparant les éclaircissements théoriques de la deuxième partie. J'ai choisi pour cela de décrire quelques étapes décisives : Leibnitz, Euler, Cauchy, Stokes, Stieltjes, Poincaré, Borel et Hardy. (Je reviendrai plus loin sur l'évolution récente.)

1.1. La sommation des séries divergentes : que peut-on espérer ?

Pour la rédaction de ce paragraphe, j'ai utilisé la très agréable présentation de [Du]. Je commencerai par citer quelques phrases du mathématicien anglais J.E. Littlewood extraites de la préface au livre posthume de son ami :

The title holds curious echoes of the past, and of Hardy's past. Abel wrote in 1828 : «Divergent series are the invention of the devil and it is shameful to base on them any demonstration whatsoever.» *In the ensuing period of critical revision they were simply rejected. Then came a time when it was found that something after all could be done about them. This is now a matter of course, but in the early years of the century the subject, while in no way mystical or unrigorous, was regarded as sensational, and about the present title, now colourless there hung an aroma of paradox and audacity.*

G.H. Hardy, *Divergent series* [H1]

Si l'on manipule des séries convergentes et leurs sommes, c'est en général pour démontrer des égalités numériques ou fonctionnelles telles que

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots,$$
$$\log 2 = -\log\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2\,2} + \frac{1}{2^3\,3} + \cdots.$$

Il est intéressant de disposer de plusieurs égalités de ce type : la deuxième égalité est évidemment meilleure que la première pour un calcul numérique approché de $\log 2$ car la convergence est plus rapide. D'où l'intérêt d'étendre les manipulations aux séries divergentes et à leurs

« sommes » éventuelles pour augmenter l'arsenal des identités disponibles. C'est dans cet esprit qu'ont travaillé les mathématiciens du XVIII$^{\text{e}}$ siècle et en particulier L. EULER. Il est clair que pour fonder un tel calcul, la sommation des séries divergentes doit respecter certaines règles : en gros, on doit pouvoir remplacer — dans les calculs utilisant les opérations usuelles — une série par sa somme sans contradiction.

Soit $\mathcal{D}$ la $\mathbb{C}$-algèbre des séries numériques à termes complexes (convergentes ou non) : les opérations sont l'addition, la multiplication par les scalaires et le produit de Cauchy. On désigne par $\mathcal{C}$ la sous-algèbre des séries *absolument* convergentes. On dispose d'un homomorphisme de $\mathbb{C}$-algèbres

$$S : \mathcal{C} \to \mathbb{C}$$

qui associe à une série convergente $\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sa somme $S(\sigma)$.

On veut définir un opérateur S^* de sommation pour « des » séries divergentes. Voici les premières règles qui paraissent raisonnables pour S^* (on peut donner les variantes sur les suites) :

(s$_1$) Règle de *régularité* : si σ converge alors

$$S(\sigma) = S^*(\sigma) \quad \text{(i.e. } S^* \text{ prolonge } S).$$

(s$_2$) Règle d'*invariance par translation* :

$$S^*\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Big) = a_0 + S^*\Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\Big)$$

(s$_3$) S^* est $\mathbb{C}$-linéaire.

(s$_4$) S^* est un homomorphisme pour la multiplication.

Pratiquement, il est naturel de définir des procédés de sommation S_1^* s'appliquant à des ensembles $\mathcal{D}_1$ de séries : $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}$. On distinguera les cas :

- $\mathcal{D}_1$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}$ et S_1^* satisfait aux règles 1, 2, 3 ;
- $\mathcal{D}_1$ est une sous-algèbre de $\mathcal{D}$ et S_1^* satisfait aux règles 1, 2, 3, 4.

Ce dernier cas — évidemment beaucoup plus utile pour engendrer des identités intéressantes — est le plus difficile à fonder théoriquement (la condition 4 n'est pas facile à assurer).

Une idée naturelle est de remplacer les séries numériques $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ par les séries formelles $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et de tenter ensuite de « faire $x = 1$ ».

On dispose alors d'un opérateur de sommation S défini sur la $\mathbb{C}$-algèbre différentielle[3] des séries convergentes $(\mathbb{C}\{x\}; x^2\,\mathrm{d}/\mathrm{d}x)$ et à valeurs dans la $\mathbb{C}$-algèbre différentielle $(\mathcal{O}_0; x^2\,\mathrm{d}/\mathrm{d}x)$ des germes de fonctions holomorphes à l'origine. Le problème est de définir des algèbres différentielles $\mathcal{A}_1$ de séries formelles divergentes : $\mathbb{C}\{x\} \subset \mathcal{A}_1 \subset \mathbb{C}[[x]]$ et des opérateurs $S_1^* : \mathcal{A}_1 \to ?$ vérifiant des règles « raisonnables » :

(S_1) Règle de *régularité* : S_1^* prolonge S.

(S_2) S_1^* est un homomorphisme d'algèbres différentielles.

(S_3) Si J est l'opérateur « développement asymptotique » (§ 1.7), JS_1^* est l'identité de $\mathcal{A}_1$.

Il reste à décider *où* prend ses valeurs l'application

$$S_1^* : \mathcal{A}_1 \to ?$$

Cela ne peut être $\mathcal{O}_0$: la condition 3 imposerait alors $\mathcal{A}_1 = \mathbb{C}\{x\}$. En fait, nous verrons qu'il faut « polariser » en choisissant une direction d issue de l'origine. On prendra ensuite $? = \mathcal{A}_d$, la $\mathbb{C}$-algèbre différentielle des fonctions holomorphes sur des germes de secteurs bissectés par d (d'ouverture et rayons arbitrairement petits). Pour une direction d fixée, nous verrons qu'il y a *deux* opérateurs « naturels » de sommation S_d^+ et S_d^- (sommations latérales). Pour des séries à termes réels, on a envie de prendre pour ? les germes de fonctions analytiques réelles sur les germes de $\mathbb{R}^+ - \{0\}$ ou de $\mathbb{R}^- - \{0\}$ à l'origine. Ce point de vue se rapproche de celui d'Euler. Nous verrons qu'il conduit à certaines difficultés.

Revenons aux séries numériques et considérons les deux exemples :

$$\sigma_0 : \; 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots,$$

$$\sigma_1 : \; 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots.$$

Supposons que ces séries appartiennent à un ensemble de séries $\mathcal{D}_1$ muni d'un opérateur de sommation S^* satisfaisant les conditions (s_2) et (s_3), et notons respectivement S_0 et S_1 les sommes de nos deux séries. On a

[3] Une $\mathbb{C}$-algèbre différentielle est une $\mathbb{C}$-algèbre munie d'un endomorphisme δ qui est $\mathbb{C}$-linéaire et qui est une dérivation : $\delta(ab) = a\delta(b) + \delta(a)b$.

$S_0 = 1 - S_0$, d'où $S_0 = \frac{1}{2}$ et

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots \\ &= 0 + 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \cdots, \end{aligned}$$

d'où $2S_1 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ et $S_1 = \frac{1}{4}$. Ainsi

$$\begin{aligned} 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots &= \frac{1}{2}, \\ 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Il semble que Leibnitz ait été le premier à attribuer la valeur $\frac{1}{2}$ à la somme $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$.

En considérant toujours nos deux exemples, on peut deviner deux procédés de sommation qui paraissent raisonnables et permettent de justifier le raisonnement purement formel que l'on vient de faire. Ces deux procédés — qui donnent lieu à de larges généralisations — sont la *sommation par moyennes* et la *sommation d'Abel.*

La sommation par moyennes

L'idée de cette sommation est d'essayer de construire une *mesure positive* $\mathrm{d}\ell$ de *masse totale* 1 sur des parties de $\mathbb{N}$ et de définir la somme de la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ par

$$\int s_n \, \mathrm{d}\ell(n)$$

où s_n désigne la somme partielle

$$s_n = \sum_{p=0}^{n} a_p.$$

Le résultat doit être indépendant des premiers termes de la série. La mesure doit donc être nulle sur toute partie finie de $\mathbb{N}$, ce qui conduit à une contradiction si on la suppose σ-additive ! Il faut donc être moins exigeant et remplacer la notion de mesure part celle de *densité* [FGA]. Si ℓ est une telle densité, on notera $\ell(E)$ la masse d'un sous-ensemble E de $\mathbb{N}$ (si elle existe). La plus simple façon de construire une telle densité est d'utiliser la moyenne arithmétique de Césaro : on répartit la masse 1 sur les $n+1$ points $0, \ldots, n$,[4] et on passe à la limite en n. Les moyennes

$$t_n = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1}$$

correspondant à la série $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$ tendent vers $\frac{1}{2}$ quand $n \to +\infty$ (s_n prend alternativement les valeurs 1 ou 0).

Si on note E l'ensemble des nombres pairs, on a $\ell(E) = \lim \mu_n(E) = \frac{1}{2}$.

Ce procédé ne somme pas la série $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots$. Il faut le faire opérer deux fois : on trouve bien alors $\frac{1}{4}$ pour somme.

Plus généralement, pour chaque entier n, on peut répartir la masse 1 sur un sous-ensemble *fini* de $\mathbb{N}$ et supposer que si E est fini, $\ell(E) = 0$. Si on suppose de plus que μ_n est porté par $[1, n]$, cela revient à se donner une *matrice de Tœplitz régulière*, c'est-à-dire une matrice triangulaire infinie

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{10} & a_{11} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \cdot & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \cdots \\ a_{n0} & a_{n1} & \cdot & \cdot & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \cdots \end{pmatrix}$$

dont les coefficients sont des réels positifs, la somme des lignes étant constamment égale à 1 et les colonnes étant des suites convergeant vers zéro. La matrice colonne des t_n s'obtient alors en multipliant A par la matrice colonne des sommes partielles s_n.

La composition de deux procédés de moyenne correspond évidemment au produit des matrices. Par exemple

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

[4] La mesure correspondante est $\mu_n = (\delta_0 + \cdots + \delta_n)/(n+1)$.

correspond à la méthode de Césaro et

$$C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \cdots \\ \frac{11}{18} & \frac{5}{18} & \frac{2}{18} & \cdots \\ . & . & . & \ddots \end{pmatrix}$$

a son itération utilisée plus haut.

La *transformation d'Euler* correspond à la matrice de Tœplitz :

$$T = \begin{pmatrix} C_0^0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{2} C_1^0 & \frac{1}{2} C_1^1 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \frac{1}{2^n} C_n^0 & \frac{1}{2^n} C_n^1 & \cdots & \frac{1}{2^n} C_n^n & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Cette transformation se traduit au niveau des séries par la transformation

$$b_n = \frac{1}{2^{n+1}} \, (C_n^0 a_0 + C_n^1 a_1 + \cdots + C_n^n a_n).$$

Celle-ci s'interprète au niveau de séries formelles associées par une transformation homographique (admettant 1 pour point fixe) :

$$\widehat{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad \widehat{g}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n y^n, \quad \widehat{g}(y) = \widehat{f}\Big(\frac{\frac{1}{2} y}{1 - \frac{1}{2} y}\Big).$$

Cette transformation a été introduite par Euler comme *accélération de convergence*. Appliquée par exemple à la série

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots,$$

elle donne

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2\, 2} + \frac{1}{2^3\, 3} + \cdots,$$

ce qui accélère le calcul de $\log 2$.

Au lieu d'utiliser des mesures μ_n paramétrées par $n \in \mathbb{N}$ et à support fini, on peut utiliser des mesures μ_t paramétrées par $t > 0$ et à support quelconque. Un exemple fondamental est la *densité de Borel* associée à la famille de mesures de Poisson :

$$\mu_t = \mathrm{e}^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n\,!} \delta_n.$$

Cette méthode, due à E. BOREL (1899) fournit pour somme de la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ la limite (si elle existe)

$$\lim_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-t} S(t), \quad \text{où} \quad S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{t^n}{n\,!} \cdot$$

Nous reviendrons plus loin sur cette méthode fondamentale. Si on l'applique à la «série de Leibnitz» $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$, on trouve encore :

$$\lim_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{ch}\, t = \frac{1}{2} \cdot$$

Les méthodes abéliennes

Après la description des méthodes de moyennes, passons à celle des méthodes *abéliennes*. La plus simple est basée sur le théorème d'Abel : si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est convergente, sa somme est donnée par :

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

D'où l'idée — que l'on trouve chez EULER — de prendre pour certaines séries divergentes, comme *définition* de la somme de la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ la limite (si elle existe)

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

- Si l'on applique cette méthode à la série de Leibnitz, on trouve

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, x^n = \frac{1}{1+x} \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}$$

comme on s'y attendait.

- Pour la série $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots$, on trouve

$$1 - 2x + 3x^2 + \cdots = \frac{1}{(1+x)^2}$$

dont la limite est $\frac{1}{4}$.

Cette méthode se généralise de la façon suivante. On pose $x = \mathrm{e}^{-t}$; alors $x^n = \mathrm{e}^{-tn}$. Soit $\{\lambda_n\}$ une suite *donnée* strictement croissante de réels strictement positifs tendant vers $+\infty$. A la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, on associe (si elle existe pour tout $t > 0$ assez petit) la fonction

$$f_t(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, \mathrm{e}^{-t\lambda_n},$$

et — toujours sous réserve d'existence — on *définit* la somme par :

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t>0}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, \mathrm{e}^{-t\lambda_n}.$$

Nous reviendrons plus loin sur les exemples suivants :

$$\lambda_n = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } \; n = 0 \\ n \log n & \text{si } n > 0 \end{array} \right\} \quad (\textsc{Lindelöf})\,;$$

$$\lambda_n = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } \; n = 0, 1, 2 \\ n \log n \log(\log n) & \text{si } n > 2 \end{array} \right\} \quad (\textsc{Hardy} \text{ [H2], } 1941).$$

1.2. L'équation fonctionnelle de la fonction ζ. La série d'Euler

On trouvera plus de détails sur les questions évoquées ci-dessous dans [H1] et [Bar]. Le mémoire [Eu1] de L. EULER commence ainsi.

Le rapport que je me propose de développer ici regarde les sommes de ces deux séries infinies générales :

$$1^m - 2^m + 3^m - 4^m + 5^m - 6^m + 7^m - 8^m + \cdots,$$
$$\frac{1}{1^m} - \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} - \frac{1}{4^m} + \frac{1}{5^m} - \frac{1}{6^m} + \frac{1}{7^m} - \frac{1}{8^m} + \cdots,$$

Le but d'EULER est d'étudier l'égalité :

$$\frac{1^{s-1}-2^{s-1}+3^{s-1}-\cdots}{\dfrac{1}{1^s}-\dfrac{1}{2^s}+\dfrac{1}{3^s}-\cdots}=-\frac{(s-1)\,!(2^s-1)}{(2^{s-1}-1)\pi^s}\cos\bigl(\tfrac{1}{2}\,s\pi\bigr).$$

Plus précisément, il se propose de « vérifier » cette égalité pour tout s entier, pour $s=\frac{1}{2}$ et $s=\frac{3}{2}$. Il a besoin pour cela de sommer les séries divergentes :

$$1^m-2^m+3^m-4^m+5^m-6^m+7^m-8^m+\cdots.$$

Il emploie la méthode d'Abel. Pour $m=0$ et 1, on retrouve les deux séries étudiées plus haut et leurs sommes respectives $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$. Plus généralement, il obtient pour $k>1$:

$$1^{2k}-2^{2k}+3^{2k}-\cdots=0,$$

$$1^{2k-1}-2^{2k-1}+3^{2k-1}-\cdots=(-1)^{k-1}\frac{2^{2k}-1}{2k}B_k.$$

La fonction ζ de Riemann est définie, pour $\operatorname{Re}s>0$, par :

$$\zeta(s)=1^{-s}+2^{-s}+3^{-s}+\cdots.$$

On lui associe la fonction :

$$\eta(s)=1^{-s}-2^{-s}+3^{-s}-\cdots.$$

On a

$$\eta(s)=(1-2^{1-S})\zeta(s)$$

et la célèbre équation fonctionnelle de la fonction ζ due à B. RIEMANN s'écrit :

$$(2^{s-1}-1)\,\eta(1-S)=-(2^s-1)\pi^{-s}\cos\bigl(\tfrac{1}{2}\,s\pi\bigr)\Gamma(s)\,\eta(s).$$

On reconnaît l'identité devinée par EULER cent ans avant RIEMANN...

Notons qu'un calcul théoriquement fondé des sommes de séries divergentes utilisées fournit une *preuve rigoureuse* de la formule pour s entier. (EULER ne prétendait pas donner une telle démonstration.)

La façon dont EULER concevait la justification du calcul avec les séries divergentes est bien dégagée dans son étude de la série d'Euler :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n\,!.$$

Cette justification était en grande partie «expérimentale» mais très soigneuse. On trouvera beaucoup de détails sur cet exemple dans [Bar]. On peut décrire en termes modernes l'idée générale d'EULER de la façon suivante : étant donnée la série de terme général a_n, il s'agit de trouver un (ou des) *programme*(*s*) engendrant les a_n. Citons EULER (1749) :

Mais j'ai déjà remarqué dans une autre occasion qu'il faut donner au mot de somme *une signification plus étendue et entendre par là une fraction ou une autre expression analytique, laquelle étant développée suivant les principes de l'analyse produise la même série dont on cherche la somme.*

Il écrit ailleurs

... summa cujusque seriei est valor expressionis illius finitæ, ex cujus evolutione illa series oritur.[5]

Dans [Eu2], EULER décrit quatre procédés (heuristiques) pour sommer $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n\,!$. Il vérifie par des calculs numériques l'accord entre ces diverses approches. Nous ne décrirons pas ces procédés (ceci est très bien fait dans [Bar]). Celui qui nous intéresse le plus pour la suite est basé sur le fait que la série formelle correspondante

$$\widehat{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\; n\,!\, x^{n+1}$$

est une *solution formelle* de l'équation différentielle d'Euler :

$$x^2y' + y = x.$$

Parmi les autres méthodes, il y a la transformation en la fraction continue convergente

$$1/1 + 1/1 + 1/1 + 2/1 + 2/1 + 3/1 + 3/1 + \cdots$$

[5] ... la somme de cette série est la valeur de l'expression finie dont le développement produit la série.