

**416**

**ASTÉRISQUE**

**2020**

SOME ASPECTS  
OF THE THEORY OF DYNAMICAL SYSTEMS:  
A TRIBUTE TO JEAN-CHRISTOPHE YOCCOZ

Volume II

Sylvain CROVISIER, Raphaël KRIKORIAN,  
Carlos MATHEUS, Samuel SENTI, éditeurs

**SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE**

---

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 416, 2020

---

*Comité de rédaction*

Marie-Claude ARNAUD	Fanny KASSEL
Christophe BREUIL	Eric MOULINES
Damien CALAQUE	Alexandru OANCEA
Philippe EYSSIDIEUX	Nicolas RESSAYRE
Christophe GARBAN	Sylvia SERFATY
Colin GUILLARMOU	
Nicolas BURQ (dir.)	

*Diffusion*

Maison de la SMF	AMS
Case 916 - Luminy	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Providence RI 02940
France	USA
<a href="mailto:commandes@smf.emath.fr">commandes@smf.emath.fr</a>	<a href="http://www.ams.org">http://www.ams.org</a>

*Tarifs*

*Vente au numéro* : 55 € (\$ 83)

*Abonnement* Europe : 665 €, hors Europe : 718 € (\$ 1077)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

*Secrétariat*

Astérisque

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie

75231 Paris Cedex 05, France

Fax: (33) 01 40 46 90 96

[asterisque@smf.emath.fr](mailto:asterisque@smf.emath.fr) • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2020

*Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.*

ISSN: 0303-1179 (print) 2492-5926 (electronic)

ISBN 978-2-85629-917-3

doi:10.24033/ast.1108

Directeur de la publication : Stéphane Seuret

---

**416**

**ASTÉRISQUE**

**2020**

SOME ASPECTS  
OF THE THEORY OF DYNAMICAL SYSTEMS:  
A TRIBUTE TO JEAN-CHRISTOPHE YOCCOZ

Volume II

Sylvain CROVISIER, Raphaël KRIKORIAN,  
Carlos MATHEUS, Samuel SENTI, éditeurs

**SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE**

*Sylvain Crovisier*

CNRS - Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, Université Paris-Saclay, 91405 Orsay Cedex, France.

sylvain.crovisier@math.u-psud.fr

*Raphaël Krikorian*

Department of Mathematics, CNRS UMR 8088, Université de Cergy-Pontoise, 2, av. Adolphe Chauvin F-95302 Cergy-Pontoise, France.

raphael.krikorian@u-cergy.fr

*Carlos Matheus*

CMLS, École polytechnique, CNRS (UMR 7640), 91128, Palaiseau, France.

matheus.cmss@gmail.com

*Samuel Senti*

Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, CP. 68 530, Rio de Janeiro, Brésil.

senti@im.ufrj.br

---

**Classification mathématique par sujet (2010).** — 32A10, 37A17, 37A25, 37A50, 37C40, 37C75, 37D30, 37E05, 37E30, 37F25, 37F30, 37F50, 37J50, 53D12, 54H20, 60F05, 70H20; 37C86, 37D25, 37F25, 37J12.

**Mots-clefs.** — Accessibilité, application Gevrey,  $(C^0)$ -commutativité au sens de Poisson, centralisateurs, changements de temps, complète intégrabilité, conditions diophantiennes, coordonnées de Fatou, décroissance des corrélations, déviations des moyennes ergodiques, difféomorphismes analytiques du cercle, dimension centrale, distributions limites, domaines de rotation, dynamique holomorphe, échange d'intervalle, feuilletage invariant, feuilletages, flots nilpotents de Heisenberg, fonctions génératrices, germes holomorphes de  $\mathbb{C}^2$ , hamiltoniens, hérissons, homéomorphismes symplectiques, hyperbolicité faible, hyperbolicité partielle, instabilité, linéarisation, mélange, nombre de rotation, pétales invariants, petits diviseurs, point fixe elliptique, points fixes indifférents, renormalisation, renormalisation sectorielle, sommes de Birkhoff, sous-variétés lagrangiennes, symplectomorphisme, système dynamique, théorème de translation plane de Brouwer, théorèmes d'Arnol'd- Liouville, type Roth, variété centrale, vitesses de mélange.

**Keywords.** — Accessibility, analytic circle diffeomorphisms, Arnol'd- Liouville theorem, Birkhoff sums, Brower Plane Translation Theorem,  $(C^0)$ -Poisson commutativity, center manifold, central dimension, centralizers, complete integrability, complex dynamics, decay of correlations, deviation of ergodic averages, Diophantine conditions, dynamical system, elliptic fixed point, Fatou coordinates, foliation, generating functions, Gevrey map, Hamiltonian, hedgehogs, Heisenberg nilpotent flows, holomorphic germs in  $\mathbb{C}^2$ , holomorphic germs in  $\mathbb{C}^n$ , indifferent fixed points, instability, interval exchange maps, invariant foliation, invariant petals, Lagrangian submanifolds, limit distributions, linearization, measurable Riemann Mapping Theorem, mixing, mixing rates, non-uniform hyperbolicity, partial hyperbolicity, renormalization, rotation domains, rotation number, Roth type, sector renormalization, small divisors, symplectic homeomorphisms, symplectomorphism, time-changes.

**SOME ASPECTS OF THE THEORY OF DYNAMICAL SYSTEMS:  
A TRIBUTE TO JEAN-CHRISTOPHE YOCCOZ**

**Volume II**

Sylvain Crovisier, Raphaël Krikorian, Carlos Matheus, Samuel Senti, éditeurs

*Abstract.* — This is the second of two volumes which celebrate the memory of Jean-Christophe Yoccoz. These volumes present research articles on various aspects of the theory of dynamical systems and related topics that were dear to him.

*Résumé (Quelques aspects de la théorie des systèmes dynamiques : un hommage à Jean-Christophe Yoccoz)* — Voici le deuxième de deux volumes qui célèbrent la mémoire de Jean-Christophe Yoccoz. Ils regroupent des articles de recherche portant sur divers aspects de la théorie des systèmes dynamiques ainsi que sur des sujets connexes qui lui étaient chers.



## TABLE DES MATIÈRES

MARIE-CLAUDE ARNAUD & JINXIN XUE — <i>A <math>C^1</math> Arnol'd-Liouville theorem</i> .....	1
1. Introduction and Main Results .....	1
Structure of the proofs and comments .....	8
2. Lipschitz complete integrability determines the Dynamics on each minimal torus .....	8
2.1. Uniform rate for the flow on the invariant tori .....	10
2.2. Uniform rate and completely irrational rotation vector imply uniform Lipschitz conjugacy to a flow of rotations .....	11
2.3. Lipschitz conjugacy to a completely irrational rotation implies bi-Lipschitz conjugacy .....	14
2.4. Proofs of Theorem 2.1 and Proposition 2.1 .....	16
3. The A-non-degeneracy condition .....	17
4. The symplectic homeomorphism in the case of $C^1$ complete integrability .....	18
4.1. A generating function for the Lagrangian foliation .....	18
4.2. The $C^1$ property of the conjugacy .....	19
4.3. The symplectic homeomorphism and the proof of Theorem 1.1 ...	22
4.4. The smooth approximation .....	23
Appendix A. $C^0$ integrability and $C^0$ Lagrangian submanifolds .....	23
A.1. Different notions of $C^0$ integrability .....	24
Appendix B. Smooth Hamiltonians that are $C^0$ completely integrable ...	28
Appendix C. Smooth Hamiltonians that are Lipschitz completely integrable .....	29
Acknowledgment .....	30
References .....	30
JUAN RIVERA-LETELIER — <i>Asymptotic expansion of smooth interval maps</i> .....	33
1. Introduction .....	34
1.1. Quantifying asymptotic expansion .....	34
1.2. Nonuniformly hyperbolic interval maps .....	36
1.3. Exponentially mixing acip's .....	38

1.4. Topological invariance .....	38
1.5. High-temperature phase transitions .....	39
1.6. Notes and references .....	40
1.7. Strategy and organization .....	41
Acknowledgments .....	41
2. Preliminaries .....	41
2.1. Fatou and Julia sets .....	42
2.2. Topological exactness .....	42
2.3. Differentiable interval maps .....	42
2.4. Interval maps of class $C^3$ with non-flat critical points .....	43
3. Exponential shrinking of components .....	44
4. Quantifying asymptotic expansion .....	51
5. Conjugacy to a piecewise affine map .....	54
6. Nonuniform hyperbolicity conditions .....	57
Appendix A. Lyapunov exponents are nonnegative .....	60
References .....	61
STEFANO MARMI & CORINNA ULCIGRAI & JEAN-CHRISTOPHE YOCCOZ	
— <i>On Roth type conditions, duality and central Birkhoff sums for i.e.m.</i>	65
1. Introduction .....	66
1.1. Dual Roth type and distributional limit shapes .....	67
1.2. Absolute Roth type .....	70
1.3. Outline of the paper .....	70
1.4. Acknowledgements .....	71
2. Background material and notations .....	71
2.1. Interval exchange maps .....	72
2.2. Translation surfaces and suspension data .....	73
2.3. A step of Rauzy–Veech algorithm, Rauzy Veech diagrams and Rauzy-Veech matrices .....	75
2.4. Iterations of the Rauzy-Veech map and the Zorich algorithm .....	76
2.5. Dynamics of the continued fraction algorithms .....	77
2.6. Special Birkhoff sums and the extended Kontsevich-Zorich cocycle .....	78
2.7. The boundary operator .....	79
2.8. Summary of notation .....	80
Interval exchange maps .....	80
Translation surfaces and suspension data .....	81
The Rauzy-Veech renormalization algorithm .....	81
Functional spaces, special Birkhoff sums and boundary operator ...	82
3. Absolute Roth type and applications .....	82
3.1. Roth Type i.e.m .....	83
3.2. The cones $\mathcal{C}(\pi)$ .....	85
3.3. Absolute Roth type i.e.m .....	86
3.4. Two crucial estimates .....	87



3.5. Results on the cohomological equation for absolute Roth type i.e.m	90
3.6. Results on the cohomological equation for translation surfececs in a.e. direction	92
4. Dual Roth Type	93
4.1. Backward Rauzy-Veech induction and backward rotation numbers	94
4.2. Dual special Birkhoff sums	95
4.3. Dual Roth type condition	98
4.4. Dual lengths control	100
4.5. Estimates on dual special Birkhoff sums of Hölder functions	101
5. Distributional limit shapes	103
5.1. Corrected characteristic functions	104
5.2. The functions $\Omega_\alpha^{(n)}(\pi, \tau, \chi)$	106
5.3. Comparing the functions $\Omega_\alpha^{(n)}(\pi, \tau, \chi)$ and $\Omega_\alpha^{(n')}(\pi, \tau, \chi)$	107
5.4. Distributional convergence of the sequence $\Omega_\alpha^{(n)}(\pi, \tau, \xi)$ as $n \rightarrow -\infty$	108
6. Homological interpretation	110
6.1. Bases of homology associated to the Rauzy-Veech algorithm	110
The classes $\theta_\alpha \in H_1(M \setminus \Sigma, \mathbb{Z})$	110
The classes $\zeta_\alpha \in H_1(M, \Sigma, \mathbb{Z})$	111
Duality and relation with $\Omega_\pi$	111
6.2. Change of bases associated to the Rauzy-Veech algorithm	111
6.3. KZ-hyperbolic translation surfaces	112
6.4. Piecewise-affine paths in $H_1(M \setminus \Sigma, \mathbb{R})$	116
6.5. The functions $\Omega_\alpha^{(n)}(\mathcal{Y})$	117
6.6. Piecewise-affine paths in $H_1(M, \Sigma, \mathbb{R})$	118
6.7. The functions $\Omega_\alpha^{*(n)}(\mathcal{Y})$	119
Appendix A. Completeness of backward rotation numbers	120
A.1. The quantity $H(n)$	121
A.2. Switching times	121
A.3. The subset $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$	123
A.4. Decompositions of $\mathcal{A} \setminus \mathcal{A}'$	123
A.5. Proof of Proposition 4.3	125
Appendix B. Adaptation of the proofs of results on cohomological equation for absolute Roth type i.e.m.	125
B.1. Estimates for special Birkhoff sums with $C^1$ data	125
B.2. Higher differentiability	126
B.3. Growth of $B(0, n_\ell)$	126
B.4. Adaptation of the proof of Theorems 3.10 and 3.11 in [38]	127
B.4.1. Adaptation of the proof of Lemma 3.15 in [38]	128
B.4.2. Space and Time decompositions	128
B.4.3. General Hölder estimates	128

References .....	129
ARTUR AVILA & XAVIER BUFF & ARNAUD CHÉRITAT — <i>Smooth Siegel disks everywhere</i> .....	
	133
Introduction .....	133
1. Conformal radius, wild combs and the general construction. ....	135
1.1. Siegel disks and restrictions .....	135
1.2. Properties of the conformal radius as a function of the angle ....	137
1.3. Properties of the linearizing map .....	138
1.4. A remark on continuum theory .....	139
1.5. Special case: assuming Brjuno's condition is optimal .....	140
1.6. Smooth Siegel disks .....	141
Construction of a sequence $\theta_n$ .....	142
Properties of the limit $\theta$ .....	142
1.7. Other regularity classes for the boundary .....	143
1.8. General case .....	143
2. Proof of the main lemma .....	148
2.1. Lifts .....	148
2.1.1. Definitions .....	148
2.1.2. Transfer of the Lipschitz condition to the lifts .....	149
2.2. Gluing .....	150
2.3. Iterations and rescalings .....	155
2.4. Reminder on continued fractions .....	155
2.5. Renormalization .....	156
2.5.1. Foreword .....	156
2.5.2. Construction .....	157
2.6. Proof of Lemma 2 for $\alpha \equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}}$ .....	161
2.7. Improvement through renormalization for maps tending to a non-zero rotation .....	164
2.8. Proof of Lemma 2 for $\alpha = p/q$ .....	170
2.9. Proof of lem:main2 for $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .....	171
Appendix A. Analytic degenerate families .....	175
Appendix B. General statement .....	178
References .....	178
RICARDO PÉREZ-MARCO — <i>On quasi-invariant curves</i> .....	
	181
1. Introduction .....	181
2. Analytic circle diffeomorphisms .....	183
2.1. Notations .....	183
2.2. Real estimates .....	183
3. Denjoy-Yoccoz Lemma .....	185
4. Hyperbolic Denjoy-Yoccoz Lemma .....	186
4.1. Flow interpolation in $\mathbb{R}$ .....	186

4.2. Flow interpolation in $\mathbb{C}$ .....	187
4.3. Hyperbolic Denjoy-Yoccoz Lemma .....	187
5. Quasi-invariant curves .....	188
6. Reduction to small non-linearity .....	190
Acknowledgements .....	191
References .....	191
TANYA FIRSOVA & MIKHAIL LYUBICH & REMUS RADU & RALUCA TANASE — <i>Hedgehogs for neutral dissipative germs of holomorphic diffeomorphisms of <math>(\mathbb{C}^2, 0)</math></i> .....	
1. Introduction .....	193
Acknowledgement .....	196
2. Center manifolds of the semi-indifferent fixed point .....	196
3. Semi-parabolic germs .....	197
4. Proof of the main theorem .....	205
Proof of Theorem A .....	205
Associated circle homeomorphism .....	206
5. Appendix: Alternative approach in dimension one .....	207
References .....	210
MIKHAIL LYUBICH & REMUS RADU & RALUCA TANASE — <i>Hedgehogs in higher dimensions and their applications</i> .....	
1. Introduction .....	213
Acknowledgement .....	217
2. Holomorphic germs of $(\mathbb{C}, 0)$ .....	217
3. A complex structure on the center manifold .....	219
4. Quasiconformal conjugacy .....	226
4.1. Preliminaries .....	226
4.2. Quasiconformal conjugacy to an analytic map .....	226
4.3. Proof of Theorem A .....	229
5. Dynamical consequences of Theorem A .....	230
Step 1 .....	231
Step 2 .....	232
Non-linearizable germ with a Siegel disk .....	235
6. A generalization to germs of $(\mathbb{C}^n, 0)$ .....	240
Types of hedgehogs .....	244
7. Semi-parabolic germs of $(\mathbb{C}^n, 0)$ .....	245
Holomorphic Fatou coordinates .....	249
References .....	250
GIOVANNI FORNI & ADAM KANIGOWSKI — <i>Time-changes of Heisenberg nilflows</i> .....	
1. Introduction .....	254
2. Definitions .....	257

2.1. Heisenberg Nilflows .....	257
2.2. Heisenberg moduli space .....	257
2.3. Main results .....	258
2.4. The renormalization flow .....	259
2.5. Sobolev spaces .....	259
3. Representation theory .....	260
4. Stretching of curves .....	261
5. Construction of the functionals .....	262
6. Main properties of the functionals .....	267
7. Limit distributions .....	272
8. Square mean lower bounds .....	278
9. Analyticity of the functionals .....	283
10. Bounds on the valency .....	287
11. Measure estimates: the bounded-type case .....	289
12. Measure estimates: the general case .....	291
13. Correlations. Proof of Theorems 2.2 and 2.3 .....	294
References .....	297
ARTUR AVILA & MARCELO VIANA — <i>Stable accessibility with 2-dimensional center</i> .....	
1. Introduction .....	301
2. Deformations paths .....	303
3. An intersection property .....	306
4. An approximation property .....	307
5. Connected subgroups of surface diffeomorphisms .....	309
6. Density of stable accessibility .....	315
References .....	319
BASSAM FAYAD & JEAN-PIERRE MARCO & DAVID SAUZIN — <i>Attracted by an elliptic fixed point</i> .....	
1. Introduction .....	321
2. Preliminaries and outline of the strategy .....	323
3. The attraction mechanism .....	326
4. Proof of Theorem A .....	328
Gevrey functions, maps and flows .....	334
A.1. Gevrey functions and Gevrey maps .....	334
The Banach algebra of uniformly Gevrey- $(\alpha, L)$ functions .....	334
The Banach space of uniformly Gevrey- $(\alpha, L)$ maps .....	334
Composition with close-to-identity Gevrey- $(\alpha, L)$ maps .....	335
A.2. Estimates for Gevrey flows .....	337
Acknowledgments .....	339
References .....	339

## RÉSUMÉS DES ARTICLES

### *Un théorème $C^1$ d'Arnol'd-Liouville*

MARIE-CLAUDE ARNAUD & JINXIN XUE ..... 1

Dans cet article, nous montrons une version du théorème d'Arnol'd-Liouville pour des hamiltoniens de classe  $C^2$  qui ont assez de hamiltoniens de classe  $C^1$  commutant avec eux. Nous montrons que le caractère Lipschitz du feuilletage en tores lagrangiens invariants est crucial pour déterminer la dynamique sur chaque tore invariant et que la régularité  $C^1$  du feuilletage est cruciale pour montrer la continuité des coordonnées d'Arnol'd-Liouville. Nous explorons aussi différentes notions d'intégrabilité au sens  $C^0$  ou Lipschitz.

### *Expansion asymptotique des applications lisses d'intervalle*

JUAN RIVERA-LETELIER ..... 33

On associe à chaque application lisse et non dégénérée de l'intervalle un nombre mesurant son expansion asymptotique globale. On montre que ce nombre peut être calculé de plusieurs façons distinctes. En conséquence, plusieurs notions d'hyperbolicité faible coïncident. De cette façon on obtient une extension aux applications de l'intervalle avec une nombre arbitraire de points critiques du fameux résultat de NOWICKI et SANDS caractérisant la condition de COLLET-ECKMANN pour les applications unimodales. Ceci résout aussi une conjecture de LUZZATTO en dimension 1. En combinaison avec un résultat de NOWICKI et PRZYTYCKI, ces considérations entraînent que plusieurs notions d'hyperbolicité faible sont invariantes par conjugaison topologique. Une autre conséquence est pour le formalisme thermodynamique : une application lisse et non dégénérée de l'intervalle possède une transition de phase de haute température si et seulement si elle n'est pas LYAPUNOV hyperbolique.

### *Sur les conditions de type Roth, la dualité et les sommes de Birkhoff centrées pour les échange d'intervalles*

STEFANO MARMI & CORINNA ULCIGRAI & JEAN-CHRISTOPHE YOCCOZ ..... 65

Nous introduisons deux conditions diophantiennes pour les nombres de rotation des transformations d'échange d'intervalles (i.e.m.) et des surfaces de translation : la condition absolue de type Roth est un affaiblissement de la notion i.e.m

de type Roth, tandis que la condition duale de type Roth est une condition sur le nombre de rotation en arrière d'une surface de translation.

Nous montrons que les résultats sur l'équation cohomologique prouvés précédemment dans [38] pour les i.e.m. de type Roth restreint (sur la solvabilité en supposant un nombre fini d'obstructions et la régularité des solutions) peuvent être étendues aux i.e.m. de type Roth absolu restreint. Sous la condition duale de type Roth, nous associons des formes limites (limit shapes) distributionnelles à une classe de fonctions avec des déviations sous-polynomiales des moyennes ergodiques (correspondantes aux classes d'homologie relatives), qui sont construites de manière similaire aux formes limites des sommes de Birkhoff associées dans [36] aux fonctions qui correspondent aux exposants de Lyapunov positifs.

*De l'ubiquité des disques de Siegel à bord lisse*

ARTUR AVILA & XAVIER BUFF & ARNAUD CHÉRITAT ..... 133

Nous démontrons l'existence de disques de Siegel à bord lisse dans la plupart des familles de fonctions holomorphes fixant l'origine. La méthode peut également donner d'autres types de régularité pour le bord. On demande à la famille d'avoir un point fixe indifférent en 0, d'être paramétrisée par le nombre de rotation  $\alpha$ , de dépendre d' $\alpha$  de façon Lipschitz-continue et d'être non-dégénérée. Une famille est dite dégénérée si l'ensemble de ses applications non-linéarisables n'est pas dense. Nous donnons une caractérisation des familles dégénérées, qui prouve qu'elles sont assez exceptionnelles.

*Sur les courbes quasi-invariantes*

RICARDO PÉREZ-MARCO ..... 181

Les courbes quasi-invariantes sont un outil fondamental dans l'étude de la dynamique des hérissons. Le lemme de Denjoy-Yoccoz est le premier pas dans la théorie de renormalisation de Yoccoz des difféomorphismes analytiques du cercle et l'étude de sa linéarisation. On donne une nouvelle version du lemme de Denjoy-Yoccoz en termes de métrique hyperbolique, ce qui fournit une nouvelle construction directe des courbes quasi-invariantes sans utiliser la renormalisation comme dans la construction originelle.

*Hérissons pour les germes dissipatifs neutres des difféomorphismes holomorphes de  $(\mathbb{C}^2, 0)$*

TANYA FIRSOVA & MIKHAIL LYUBICH & REMUS RADU & RALUCA  
TANASE ..... 193

Nous montrons l'existence de hérissons pour les germes de difféomorphismes holomorphes de  $(\mathbb{C}^2, 0)$  ayant un point fixe semi-neutre à l'origine, en utilisant uniquement des techniques topologiques. Cette approche donne également une preuve alternative d'un théorème de Pérez-Marco sur l'existence de hérissons pour les germes de difféomorphismes holomorphes de  $(\mathbb{C}, 0)$  ayant un point fixe neutre.

*Hérissons en dimension supérieure et leurs applications*

MIKHAIL LYUBICH &amp; REMUS RADU &amp; RALUCA TANASE ..... 213

Dans cet article, on étudie la dynamique des germes de difféomorphismes holomorphes de  $(\mathbb{C}^n, 0)$  ayant un point fixe à l'origine avec exactement une valeur propre neutre. Nous prouvons que la fonction sur n'importe quelle variété centrale locale de 0 est quasiconformément conjuguée à une fonction holomorphe et utilisons ce théorème pour adapter des résultats en dimension une complexe aux dimensions supérieures.

*Changements de temps des flots nilpotents d'Heisenberg*

GIOVANNI FORNI &amp; ADAM KANIGOWSKI ..... 253

Nous étudions les flots nilpotents de Heisenberg en dimension trois. Sous une condition Diophantienne de mesure pleine sur le générateur du flot, nous montrons l'existence de *fonctionnelles de Bufetov*, qui sont asymptotiques aux intégrales ergodiques pour toutes les fonctions suffisamment différentiables, qui ont une propriété modulaire, et satisfont une identité de changement d'échelle sous la dynamique de renormalisation. De la propriété asymptotique, nous dérivons des résultats sur les distributions limites des moyennes ergodiques, qui généralisent les travaux de Griffin et Marklof [17], et Cellarosi et Marklof [8]. Ensuite nous montrons une propriété d'analyticité des fonctionnelles dans les directions transverses au flot. Comme conséquence de cette propriété d'analyticité, nous dérivons l'existence d'un ensemble de mesure pleine de flots nilpotents dont les changements de temps *génériques* (non-triviaux) sont mélangeant, et de plus ont une vitesse de mélange « polynomiale étirée » pour toutes les fonctions suffisamment différentiables (cela améliore un résultat de Avila, Forni, et Ulcigrai [2]). De plus, nous montrons qu'il existe un ensemble de dimension de Hausdorff maximale de flots nilpotents tels que les changements de temps génériques non-triviaux ont une vitesse de mélange polynomiale.

*Accessibilité stable de dimension centrale 2*

ARTUR AVILA &amp; MARCELO VIANA ..... 301

L'accessibilité est une propriété  $C^1$ -stable parmi les difféomorphismes partiellement hyperboliques à dimension centrale 2. De plus, l'accessibilité (stable) est une propriété  $C^1$ -dense dans le domaine des produits gauches satisfaisant la condition de regroupement central ('center bunching').

*Attiré par un point fixe elliptique*

BASSAM FAYAD &amp; JEAN-PIERRE MARCO &amp; DAVID SAUZIN ..... 321

Nous donnons des exemples de difféomorphismes symplectiques de  $\mathbf{R}^6$  pour lesquels l'origine est un point fixe elliptique non résonant qui attire une orbite.





## ABSTRACTS

### *A $C^1$ Arnol'd-Liouville theorem*

MARIE-CLAUDE ARNAUD & JINXIN XUE ..... 1

In this paper, we prove a version of Arnol'd-Liouville theorem for  $C^2$  Hamiltonians having enough  $C^1$  commuting Hamiltonians. We show that the Lipschitz regularity of the foliation by invariant Lagrangian tori is crucial to determine the Dynamics on each Lagrangian torus and that the  $C^1$  regularity of the foliation by invariant Lagrangian tori is crucial to prove the continuity of Arnol'd-Liouville coordinates. We also explore various notions of  $C^0$  and Lipschitz integrability.

### *Asymptotic expansion of smooth interval maps*

JUAN RIVERA-LETELIER ..... 33

We associate to each non-degenerate smooth interval map a number measuring its global asymptotic expansion. We show that this number can be calculated in various different ways. A consequence is that several natural notions of nonuniform hyperbolicity coincide. In this way we obtain an extension to interval maps with an arbitrary number of critical points of the remarkable result of Nowicki and Sands characterizing the Collet-Eckmann condition for unimodal maps. This also solves a conjecture of Luzzatto in dimension 1.

Combined with a result of Nowicki and Przytycki, these considerations imply that several natural nonuniform hyperbolicity conditions are invariant under topological conjugacy. Another consequence is for the thermodynamic formalism: A non-degenerate smooth map has a high-temperature phase transition if and only if it is not Lyapunov hyperbolic.

### *On Roth type conditions, duality and central Birkhoff sums for i.e.m.*

STEFANO MARMI & CORINNA ULCIGRAI & JEAN-CHRISTOPHE YOCOZ ..... 65

We introduce two Diophantine conditions on rotation numbers of interval exchange maps (i.e.m.) and translation surfaces: the *absolute Roth type condition* is a weakening of the notion of Roth type i.e.m., while the *dual Roth type condition* is a condition on the *backward* rotation number of a translation surface. We show that results on the cohomological equation previously proved in [38]

for restricted Roth type i.e.m. (on the solvability under finitely many obstructions and the regularity of the solutions) can be extended to restricted *absolute* Roth type i.e.m. Under the dual Roth type condition, we associate to a class of functions with *subpolynomial* deviations of ergodic averages (corresponding to relative homology classes) *distributional* limit shapes, which are constructed in a similar way to the *limit shapes* of Birkhoff sums associated in [36] to functions which correspond to positive Lyapunov exponents.

*Smooth Siegel disks everywhere*

ARTUR AVILA & XAVIER BUFF & ARNAUD CHÉRITAT ..... 133

We prove the existence of Siegel disks with smooth boundaries in most families of holomorphic maps fixing the origin. The method can also yield other types of regularity conditions for the boundary. The family is required to have an indifferent fixed point at 0, to be parameterized by the rotation number  $\alpha$ , to depend on  $\alpha$  in a Lipschitz-continuous way, and to be non-degenerate. A degenerate family is one for which the set of non-linearizable maps is not dense. We give a characterization of degenerate families, which proves that they are quite exceptional.

*On quasi-invariant curves*

RICARDO PÉREZ-MARCO ..... 181

Quasi-invariant curves are the fundamental tool for the study of hedgehog's dynamics. The Denjoy-Yoccoz lemma is the preliminary step for Yoccoz's complex renormalization techniques for the study of linearization of analytic circle diffeomorphisms. We give a new geometric interpretation of the Denjoy-Yoccoz lemma using the hyperbolic metric that gives a new direct construction of quasi-invariant curves without renormalization theory as in the original construction.

*Hedgehogs for neutral dissipative germs of holomorphic diffeomorphisms of  $(\mathbb{C}^2, 0)$*

TANYA FIRSOVA & MIKHAIL LYUBICH & REMUS RADU & RALUCA  
TANASE ..... 193

We prove the existence of hedgehogs for germs of complex analytic diffeomorphisms of  $(\mathbb{C}^2, 0)$  with a semi-neutral fixed point at the origin, using topological techniques. This approach also provides an alternative proof of a theorem of Pérez-Marco on the existence of hedgehogs for germs of univalent holomorphic maps of  $(\mathbb{C}, 0)$  with a neutral fixed point.

*Hedgehogs in higher dimensions and their applications*

MIKHAIL LYUBICH & REMUS RADU & RALUCA TANASE ..... 213

In this paper we study the dynamics of germs of holomorphic diffeomorphisms of  $(\mathbb{C}^n, 0)$  with a fixed point at the origin with exactly one neutral eigenvalue.

We prove that the map on any local center manifold of 0 is quasiconformally conjugate to a holomorphic map and use this to transport results from one complex dimension to higher dimensions.

*Time-changes of Heisenberg nilflows*

GIOVANNI FORNI & ADAM KANIGOWSKI ..... 253

We consider the three dimensional Heisenberg nilflows. Under a full measure set Diophantine condition on the generator of the flow we construct *Bufo* *functionals* which are asymptotic to ergodic integrals for sufficiently smooth functions, have a modular property and scale exactly under the renormalization dynamics. By the asymptotic property we derive results on limit distributions, which generalize earlier work of Griffin and Marklof [17] and Cellarosi and Marklof [8]. We then prove analyticity of the functionals in the transverse directions to the flow. As a consequence of this analyticity property we derive that there exists a full measure set of nilflows such that *generic* (non-trivial) time-changes are mixing and moreover have a “stretched polynomial” decay of correlations for sufficiently smooth functions (this strengthens a result of Avila, Forni, and Ulcigrai [2]). Moreover we also prove that there exists a full Hausdorff dimension set of nilflows such that generic non-trivial time-changes have polynomial decay of correlations.

*Stable accessibility with 2-dimensional center*

ARTUR AVILA & MARCELO VIANA ..... 299

For partially hyperbolic diffeomorphisms with 2-dimensional center, accessibility is  $C^1$ -stable. Moreover, for center bunched skew-products (stable) accessibility is  $C^\infty$ -dense.

*Attracted by an elliptic fixed point*

BASSAM FAYAD & JEAN-PIERRE MARCO & DAVID SAUZIN ..... 319

We give examples of symplectic diffeomorphisms of  $\mathbf{R}^6$  for which the origin is a non-resonant elliptic fixed point which attracts an orbit.