Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

NOMBRE DE CLASSES DE CONJUGAISON D'ÉLÉMENTS D'ORDRE FINI DANS LES GROUPES DE BROWN-THOMPSON

Hajer Hmili Ben Ammar & Isabelle Liousse

Tome 148
Fascicule 3

2020

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

pages 399-409

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un périodique trimestriel de la Société Mathématique de France.

Fascicule 3, tome 148, septembre 2020

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
`commandes@smf.emath.fr`

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
`www.ams.org`

Tarifs

Vente au numéro : 43 € ($ 64)
Abonnement électronique : 135 € ($ 202),
avec supplément papier : Europe 179 €, hors Europe 197 € ($ 296)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Bulletin de la SMF

Bulletin de la Société Mathématique de France
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 1 44 27 67 99 • Fax : (33) 1 40 46 90 96
`bulletin@smf.emath.fr` • `smf.emath.fr`

ISSN 0037-9484 (print) 2102-622X (electronic)

Directeur de la publication : Fabien DURAND

Bull. Soc. Math. France
148 (3), 2020, p. 399-409

NOMBRE DE CLASSES DE CONJUGAISON D'ÉLÉMENTS D'ORDRE FINI DANS LES GROUPES DE BROWN-THOMPSON

PAR HAJER HMILI BEN AMMAR & ISABELLE LIOUSSE

RÉSUMÉ. — Nous étendons un résultat de Matucci ([13]) sur le nombre de classes de conjugaison d'éléments d'ordre fini dans le groupe de Thompson T. D'après [12], le groupe de Brown-Thompson $T_{r,m}$ ne contient pas d'élément d'ordre q lorsque $\mathrm{pgcd}(m-1, q)$ ne divise pas r. Nous montrons que si $\mathrm{pgcd}(m-1, q)$ divise r alors il y a exactement $\varphi(q) \cdot \mathrm{pgcd}(m-1, q)$ classes de conjugaison d'éléments d'ordre q dans $T_{r,m}$, où φ est la fonction phi d'Euler. Comme corollaire, nous obtenons que le groupe de Thompson T n'est isomorphe à aucun des groupes $T_{r,m}$ avec $m \neq 2$ et tout morphisme de T dans $T_{r,m}$, avec $m \neq 2$ et $r \neq 0 \ mod\,(m-1)$, est trivial.

Texte reçu le 22 janvier 2019, modifié le 7 mai 2019, accepté le 28 novembre 2019.

HAJER HMILI BEN AMMAR, Unité d'analyse mathématique et applications, Département de mathématiques, Faculté des Sciences de Tunis, Tunisie • *E-mail :* hajermido@yahoo.fr
ISABELLE LIOUSSE, Laboratoire Paul Painlevé, Université de Lille, 59655 Villeneuve d'Ascq Cédex, France • *E-mail :* liousse@univ-lille.fr

Classification mathématique par sujets (2010). — 20E45, 37E10, 37E15.

Mots clefs. — Groupes de Thompson, Groupes de Brown, Éléments de torsion, Classes de conjugaison, Homéomorphismes PL du cercle, Isomorphismes.

Hajer Hmili remercie l' Unité d'analyse mathématique et applications de la Faculté des Sciences de Tunis et exprime sa gratitude à son mari Mourad Ben Ammar pour son soutien. Isabelle Liousse remercie le Labex CEMPI (ANR-11-LABX-0007-01), le projet ANR Gromeov (ANR-19-CE40-0007) et le CNRS pour sa délégation 2019-20.

 0037-9484/2020/399/$ 5.00
 doi:10.24033/bsmf.2810

Abstract (*Number of conjugacy classes of torsion elements in Brown-Thompson groups*). — We extend a result of Matucci ([13]) on the number of conjugacy classes of finite order elements in the Thompson group T. According to [12], if $gcd(m-1,q)$ is not a divisor of r then there does not exist element of order q in the Brown-Thompson group $T_{r,m}$. We show that if $gcd(m-1,q)$ is a divisor of r then there are exactly $\varphi(q).gcd(m-1,q)$ conjugacy classes of elements of order q in $T_{r,m}$, where φ is the Euler function phi. As a corollary, we obtain that the Thompson group T is isomorphic to none of the groups $T_{r,m}$, for $m \neq 2$ and any morphism from T into $T_{r,m}$, with $m \neq 2$ and $r \neq 0 \; mod\,(m-1)$, is trivial.

1. Introduction et définitions

En 1965, R. Thompson découvrit les premiers exemples de groupes $T \subset V$ de présentation finie, simples et infinis. Le groupe T [resp. V] se représente comme groupe d'homéomorphismes [resp. échanges d'intervalles] affines par morceaux du cercle (voir [6], [14]). En 1987, K. Brown ([5]) a défini une famille $T_{r,m} \subset V_{r,m}$ englobant T et V et les groupes $V_{r,m}$ sont isomorphes aux groupes $G_{r,m}$ de Higman ([10]).

Plus précisément, soit r un entier strictement positif, on note $\mathbb{S}_r$ le cercle $\mathbb{R}/r\mathbb{Z}$ de longueur r. Le cercle de longueur 1 est $\mathbb{S}_1$, nous le noterons plus classiquement $\mathbb{S}^1$.

Définition. — Un homéomorphisme f du cercle $\mathbb{S}_r$ est *affine par morceaux* s'il existe une subdivision finie $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_p = r$ de l'intervalle $[0,r]$ et un relevé $\tilde{f}$ de f à $\mathbb{R}$ tels que $\tilde{f}_{|[a_i,a_{i+1}]}(x) = \lambda_i x + \beta_i$, $\lambda_i, \beta_i \in \mathbb{R}$.

Les points a_i sont appelés *points de coupure* de f et les nombres λ_i, *pentes de f*.

Le groupe des homéomorphismes affines par morceaux de $\mathbb{S}_r$ préservant l'orientation est noté $PL^+(\mathbb{S}_r)$.

Définition. — Soient r et $m \geq 2$ deux entiers strictement positifs. On définit le *groupe de Brown-Thompson $T_{r,m}$* comme l'ensemble des éléments f de $PL^+(\mathbb{S}_r)$ tels que :

- les pentes de f appartiennent à $\langle m \rangle = \{m^s, s \in \mathbb{Z}\}$.
- les points de coupure de f appartiennent à $\mathbb{Z}[\frac{1}{m}] = \{N.m^s | N, s \in \mathbb{Z}\}$,
- les images par f de 0 et des points de coupure de f appartiennent à $\mathbb{Z}[\frac{1}{m}]$.

Le *groupe de Thompson T* est $T_{1,2}$.

De nombreux auteurs se sont intéressés aux invariants et à la question d'isomorphicité pour ces groupes de type Thompson ([1], [2], [3], [4], [5], [10], [12], [13], [14], ...).

Dans cet article, nous nous concentrons sur les obstructions à l'isomorphicité entre groupes $T_{r,m}$ issues des éléments d'ordre fini et de leurs classes de conjugaison. Le calcul du nombre de ces classes fût effectué pour $G_{r,m}$ par Higman ([10], section 6), pour T par Matucci ([13]) puis ultérieurement par Geoghegan-Varisco ([8]) et Fossas ([7]). Comme dans [13] et [8], nous utilisons la représentation comme groupe d'homéomorphismes affines par morceaux du cercle et disposons ainsi d'un invariant dynamique suplémentaire : le nombre de rotation de Poincaré. Nous indiquons sa définition et ses premières propriétés (voir [9] ou [11]).

Définition. — Soit f un homéomorphisme du cercle $\mathbb{S}_r$, on définit le *nombre de rotation sur* $\mathbb{S}_r$ de f par :

$$\rho(f) = \lim_{n\to\infty} (\tilde{f}^n(0)/rn)\,(mod\,1) \in \mathbb{S}^1.$$

Ce nombre ne dépend pas du choix du relevé $\tilde{f}$ et satisfait les propriétés classiques :

Propriétés. —
- *$\rho(R_\alpha) = \frac{\alpha}{r}$ où $R_\alpha(x) = x + \alpha\,(mod\,r)$,*
- *$\rho(f^n) = n\,\rho(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$,*
- *si f est d'ordre fini $q \in \mathbb{N}^{>1}$ alors $\rho(f) = \frac{p}{q}$ avec $p < q$ et $p \wedge q = 1$,*
- *soit $h : \mathbb{S}_r \to \mathbb{S}_{r'}$ un homéomorphisme préservant l'orientation alors $\rho(h \circ f \circ h^{-1}) = \rho(f)$.*

Commençons par cette observation : tout élément d'ordre q est conjugué dans $PL^+(\mathbb{S}^1)$ à une rotation d'angle $\frac{p}{q}$ avec $p \wedge q = 1$, une conjugante est construite par moyennisation (voir par exemple [11], Proposition 11.2.2). Comme deux rotations d'angles différents ne sont jamais C^0-conjuguées, le nombre de classes de conjugaison d'éléments d'ordre q dans $PL^+(\mathbb{S}^1)$ est exactement le nombre d'entiers $p < q$ premiers avec q c'est à dire $\varphi(q)$ (la fonction phi d'Euler).

Le Théorème 7.1.5 de [13] (voir aussi [8] et [7]) exprime qu'il est encore vrai pour le groupe de Thompson T : « *dans T, tout rationnel de $\mathbb{S}^1$ est réalisé comme nombre de rotation d'une unique classe de conjugaison d'éléments d'ordre fini* ».

Ici, nous établissons que cette propriété n'est plus satisfaite par les autres groupes $T_{r,m}$:

Théorème 1.1. — *Soient $r \geq 1$, $m \geq 2$ et $q \geq 2$ des entiers.*

A. Si $\mathrm{pgcd}(m-1, q)$ *ne divise pas r alors il y a* 0 *classes de conjugaison d'éléments d'ordre q dans $T_{r,m}$.*

B. Si $\mathrm{pgcd}(m-1, q)$ *divise r alors il y a* $\mathrm{pgcd}(m-1, q)$ *classes de conjugaison d'éléments d'ordre q et de nombre de rotation $\frac{p}{q}$ dans $T_{r,m}$, pour tout entier p premier avec q.*

C. Si $\mathrm{pgcd}(m-1, q)$ *divise r alors il y a $\varphi(q) \cdot$* $\mathrm{pgcd}(m-1, q)$ *classes de conjugaison d'éléments d'ordre q dans $T_{r,m}$.*