Bulletin
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

CORPS DIFFÉRENTIELS ET FLOTS GÉODÉSIQUES I

Rémi Jaoui

Tome 148
Fascicule 3

2020

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

pages 529-595

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un périodique trimestriel de la Société Mathématique de France.

Fascicule 3, tome 148, septembre 2020

Diffusion

Maison de la SMF	AMS
Case 916 - Luminy	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Providence RI 02940
France	USA
`commandes@smf.emath.fr`	`www.ams.org`

Tarifs

Vente au numéro : 43 € ($ 64)
Abonnement électronique : 135 € ($ 202),
avec supplément papier : Europe 179 €, hors Europe 197 € ($ 296)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Bulletin de la SMF

Bulletin de la Société Mathématique de France
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 1 44 27 67 99 • Fax : (33) 1 40 46 90 96
`bulletin@smf.emath.fr` • `smf.emath.fr`

ISSN 0037-9484 (print) 2102-622X (electronic)

Directeur de la publication : Fabien DURAND

Bull. Soc. Math. France
148 (3), 2020, p. 529-595

CORPS DIFFÉRENTIELS ET FLOTS GÉODÉSIQUES I

ORTHOGONALITÉ AUX CONSTANTES POUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES AUTONOMES

PAR RÉMI JAOUI

RÉSUMÉ. — L'orthogonalité aux constantes est une propriété issue de l'étude modèle-théorique des équations différentielles algébriques et qui traduit des propriétés d'indépendance algébrique remarquables pour ses solutions.

Dans cet article, on étudie la propriété d'orthogonalité aux constantes dans un langage algebro-différentiel pour les équations différentielles autonomes ainsi que des méthodes effectives pour établir cette propriété. Le résultat principal est un critère d'orthogonalité aux constantes (et sa version en famille) pour les D-variétés réelles absolument irréductibles (X, v) s'appuyant sur la dynamique du flot réel associé (M, ϕ). Plus précisément, on montre que s'il existe une partie compacte K de M, Zariski-dense dans X telle que la restriction du flot à K est topologiquement faiblement mélangeante, alors le type générique de (X, v) est orthogonal aux constantes.

Ce critère sera appliqué dans [18] à l'étude modèle-théorique du flot géodésique sur les variétés riemanniennes compactes à courbure strictement négative, présentées algébriquement.

Texte reçu le 5 février 2019, modifié le 19 février 2019, accepté le 6 avril 2020.

RÉMI JAOUI, Rémi Jaoui, Department of Mathematics – University of Notre Dame, 255 Hurley, Notre Dame, IN 46556, United States • *E-mail :* rjaoui@nd.edu

Classification mathématique par sujets (2010). — 03C98, 12H05.

Mots clefs. — Théorie des modèles, Algèbre différentielle, Théorie géométrique de la stabilité, Équations différentielles algébriques.

Recherche soutenue en partie par le contrat ANR-13-BS01-0006.

doi:10.24033/bsmf.2816

Abstract (*Differential fields and geodesic flows I. Orthogonality to the constants for autonomous differential equations*). — Orthogonality to the constants is property of an algebraic differential equation that originated from the model-theoretic study of differential fields and that expresses remarkable independence properties for its solutions

In this article, we study the property of orthogonality to the constants in a differential algebraic language for autonomous differential equations and describe some effective methods to establish this property. The main result is a criterion for orthogonality to the constants (and its version for families) for real absolutely irrecucible D-varieties (X, v) based on the dynamical properties of the associated real analytic flow (M, ϕ). More precisely, we show that if there exists a compact region K of M, Zariski-dense in X and such that the restriction of the flow ϕ to K is topologically weakly mixing then the generic type of (X, v) is orthogonal to the constants.

This criterion will be applied in [18] to study from this model-theoretic point of view the geodesic flow of a compact Riemannian varieties (presented algebraically) with negative curvature.

L'étude des propriétés d'indépendance algébrique des solutions d'une équation différentielle algébrique est un thème majeur de la théorie des équations différentielles, qui se situe au coeur des travaux de nombreux illustres mathematiciens — notamment Newton, Leibniz, Picard, Painlevé et Poincaré. En particulier, à la fin du XIX^{eme} siecle, Drach étudie dans sa thèse [9], l'existence d'un cadre algébrique (désincarné de ses réalisations analytiques) où étudier les propriétés d'intégrabilité algébrique de ces équations différentielles, à la manière de Picard et Vessiot pour les équations différentielles linéaires (voir [2] pour un aperçu historique).

Néanmoins, les problèmes de formalisme rencontrés par Drach — comparables à ceux rencontrés en géométrie algébrique à la même époque — ont poussé les mathématiciens du début du XX$^{\text{ème}}$ siècle à privilégier un cadre analytique pour étudier les équations différentielles algébriques alors même que ces dernières vérifient (très vraisemblablement) des propriétés structurelles plus fortes que leurs analogues analytiques.

A la fin des années 1970, les développements conjoints de la théorie des modèles des théories stables et de l'algèbre différentielle ont permis de développer un cadre géométrique noethérien, propice à l'étude des équations différentielles algébriques. Une caractéristique essentielle est le recours à des corps différentiels « universels » appelés *corps differentiellement clos*.

L'étude de ces « compagnons de route de la théorie des modèles » (voir [27]) est une illustration remarquable de l'efficacité des méthodes de la théorie géométrique de la stabilité pour étudier certaines géometries noetheriennes, innaccessibles auparavant. Un résultat essentiel est le théorème de Hrushovski-Sokolovic [14] — une incarnation du théorème de trichotomie de Hrushovski et Zilber pour les corps differentiellement clos — qui décrit *les équations différentielles minimales*, dont la résolution ne peut être ramenée à la résolution successive d'équations différentielles « plus simples ». L'article de Hrushovski et Sokolovic n'ayant jamais été publié, nous renvoyons à [26] et [24, Section 2.1] pour une présentation complète de la trichotomie.

L'objectif de cet article est de présenter quelques conséquences du théorème de Hrushovski-Sokolovic pour les équations différentielles autonomes (dans un langage géométrique) ainsi que d'établir des critères effectifs pour étudier les propriétés mises en jeu par ce théorème — *orthogonalité aux constantes et désintégration*. En s'appuyant sur des résultats d'Anosov [1] concernant la dynamique des champs de vecteurs hyperboliques, ces résultats seront appliqués dans [18] et [17] à l'étude de propriétés d'indépendance algébrique des solutions géodésiques d'une variété riemannienne compacte (présentée algébriquement) à courbure strictement négative.

Équations différentielles algébriques autonomes. — Dans ce texte, on travaille uniquement au dessus de corps *k de caractéristique* 0 et on considère des *équations différentielles algébriques autonomes* à paramètres dans k. Une telle equation peut être décrite « sous forme explicite » comme une paire (X, v) où X *est une variété algébrique au dessus d'un corps k de caractéristique* 0 — que l'on pourra toujours supposée lisse — *munie d'un champ de vecteurs v*.

Les relations algébriques entre n solutions de (X, v) sont représentées par certaines *sous-variétés fermées* de $(X, v)^n$ dites *invariantes*.

Ici, une sous-variété fermée (et plus généralement tout sous-schéma fermé) de (X, v) est *invariant* si le faisceau d'idéaux associé $\mathcal{I} \subset (\mathcal{O}_X, \delta_v)$ est stable par la dérivation δ_v induite par le champ de vecteurs v sur X. Géométriquement, une sous-variété fermée Z de (X, v) est invariante lorsque la sous-variété localement fermée Z_{reg} de X (constituée des points réguliers de Z) est tangente en tout point au champ de vecteurs v.

Les sous-variétés fermées invariantes de $(X, v)^n$ sont définies, tout simplement, comme les sous-variétés fermées de X^n invariante pour le champ de vecteurs produit $v \times \cdots \times v$ induit par v sur X^n. En notant $\mathcal{I}_n(X, v)$ la collection des sous-variétés fermées irréductibles invariantes de $(X, v)^n$, la suite des $\mathcal{I}_n(X, v)$ lorsque n parcourt $\mathbb{N}^*$ définit alors un langage $\mathcal{L}$ (au sens de la théorie des modèles).

L'ensemble des solutions analytiques de l'équation différentielle (X, v) est naturellement munie d'une $\mathcal{L}$-structure. Comme il est d'usage en théorie des modèles, il convient alors de compléter cette structure en *une structure existentiellement close* notée $(X, v)^{(\mathcal{U}, \delta)}$ en adjoignant toutes les solutions de cette équation différentielle dans un corps différentiel universel $(\mathcal{U}, \delta)$.

La $\mathcal{L}$-structure $(X, v)^{(\mathcal{U}, \delta_{\mathcal{U}})}$, produite par la construction précédente, jouit de propriétés particulièrement agréables : c'est une *structure ω-stable de rang fini* (borné par la dimension de X), interprétable dans un corps differentiellement clos, qui admet *l'élimination des quantificateurs dans le langage $\mathcal{L}$*. Les