Bulletin
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

LE CRISTAL DE DIEUDONNÉ DES SCHÉMAS EN $\mathbb{F}$-VECTORIELS

Arnaud Vanhaecke

Tome 148
Fascicule 3

2020

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

pages 439-465

Le *Bulletin de la Société Mathématique de France* est un périodique trimestriel
de la Société Mathématique de France.

Fascicule 3, tome 148, septembre 2020

Diffusion

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
commandes@smf.emath.fr

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 43 € ($ 64)
Abonnement électronique : 135 € ($ 202),
avec supplément papier : Europe 179 €, hors Europe 197 € ($ 296)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Bulletin de la SMF

Bulletin de la Société Mathématique de France
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 1 44 27 67 99 • Fax : (33) 1 40 46 90 96
bulletin@smf.emath.fr • smf.emath.fr

ISSN 0037-9484 (print) 2102-622X (electronic)

Directeur de la publication : Fabien DURAND

Bull. Soc. Math. France
148 (3), 2020, p. 439-465

LE CRISTAL DE DIEUDONNÉ DES SCHÉMAS EN $\mathbb{F}$-VECTORIELS

par Arnaud Vanhaecke

Résumé. — Dans cet article on décrit le cristal de Dieudonné d'un schéma en groupes fini localement libre, muni d'une action vectorielle d'un corps fini $\mathbb{F}$. Ces schémas en $\mathbb{F}$-vectoriels apparaissent lorsqu'on considère les points de torsion d'un module p-divisible. Une classe particulière de schémas en $\mathbb{F}$-vectoriels a été classifiée par Raynaud dans [9], ce qui nous permet de déterminer la structure des points de torsion d'un module p-divisible, sous certaines conditions sur son algèbre de Lie.

Abstract (*The Dieudonné crystal of* $\mathbb{F}$*-vector schemes*). — In this paper we describe the Dieudonné crystal of a finite locally free group scheme with a vector action of a finite field $\mathbb{F}$. These $\mathbb{F}$-vector schemes appear when one considers torsion points of p-divisible modules. A particular class of $\mathbb{F}$-vector schemes has been classified by Raynaud in [9], which allows us to determine the structure of torsion points of p-divisible modules, under certain conditions on its the Lie algebra.

1. Introduction

Soit p un nombre premier et $\mathbb{F}$ un corps fini à $q = p^r$ éléments. On note $\Sigma = \operatorname{Spec} \mathrm{W}(\mathbb{F})$, où W désigne le foncteur des vecteurs de Witt. Soit S un schéma sur Σ tel que p soit localement nilpotent sur S. Dans cette introduction on supposera que S est affine, de la forme $\operatorname{Spec} R$ pour R une $\mathrm{W}(\mathbb{F})$-algèbre.

Texte reçu le 1er mai 2019, modifié le 15 décembre 2019, accepté le 20 février 2019.

Arnaud Vanhaecke, Arnaud Vanhaecke, DMA, 45 rue d'Ulm, 75005 Paris, France •
E-mail : `arnaud.vanhaecke@ens.fr` • *Url :* `http://www.math.ens.fr/~vanhaecke/`

Classification mathématique par sujets (2010). — 14L05, 14L15, 14F30.

Mots clefs. — Cristaux de Dieudonné, schémas en groupes finis, groupes p-divisibles.

doi:10.24033/bsmf.2812

Dans [2], les auteurs ont introduit, par la cohomologie cristalline, une théorie de Dieudonné pour les schémas en groupes finis localement libres et les groupes p-divisibles sur S. À G un schéma en groupes fini localement libre (resp. X un groupe p-divisible) sur S on associe de manière fonctorielle un cristal $\mathbb{D}(G)$ (resp. $\mathbb{D}(X)$) sur le site cristallin $\mathrm{CRIS}(S/\Sigma)$. Le foncteur $\mathbb{D}$ et ses propriétés de pleine fidélité ont beaucoup été étudiés (cf. [6] par exemple) mais nous ne ferons pas usage de ces résultats. Nous utiliserons seulement que dans le cas où S est le spectre d'un corps parfait, le cristal de Dieudonné est équivalent au module de Dieudonné et qu'alors $\mathbb{D}$ est une équivalence de catégories.

Un *schéma en* $\mathbb{F}$*-vectoriels* G sur S est un schéma en groupes fini localement libre tel que pour tout schéma X sur S, $G(X)$ soit un espace vectoriel sur $\mathbb{F}$. C'est-à-dire que G est muni d'une action du groupe multiplicatif $\mathbb{F}^\times$, satisfaisant des conditions supplémentaires. Comme S est affine, $G = \operatorname{Spec} A$, où A est une algèbre de Hopf sur R munie d'une action de $\mathbb{F}^\times$. Cette action satisfait une propriété supplémentaire : l'addition dans $\mathbb{F}^\times \subset \mathbb{F}$ est compatible avec la convolution dans A. Cette propriété correspond à l'axiome que pour tout λ, $\lambda' \in \mathbb{F}$ et $v \in G(X)$, pour X un schéma sur S, $(\lambda + \lambda')v = \lambda v + \lambda' v$[1]. Cette action détermine une graduation indexée par $\mathbb{F}^\vee$, le groupe des caractères de $\mathbb{F}^\times$ à valeurs dans $\bar{\mathbb{Q}}_p$,

$$A = \bigoplus_{\chi \in \mathbb{F}^\vee} A_\chi. \tag{1}$$

Il n'est pas vrai que toute graduation de type $\mathbb{F}^\vee$ sur A donne lieu à une structure de schéma en $\mathbb{F}$-vectoriels sur G. En effet toute action de $\mathbb{F}^\times$ sur A ne s'étend pas nécessairement en une action vectorielle de $\mathbb{F}$. Notons que, comme A est localement libre sur R, il en est de même pour les A_χ. Dans [9], ces schémas ont été étudiés et ils sont classifiés dans le cas où pour tout $\chi \in \mathbb{F}^\vee$ non-trivial, A_χ est localement libre de rang 1 sur R et $A_1 = R \oplus A_1'$, pour A_1 la composante isotypique du caractère trivial, tel que A_1' est localement libre de rang 1. On est donc naturellement intéressé par le rang des A_χ.

Pour simplifier, on suppose $S = \operatorname{Spec} R$ connexe. Alors le rang des A_χ est constant sur R et on peut définir le *caractère de* G comme

$$\mathrm{Ch}_S(G) := \sum_{\chi \in \mathbb{F}^\vee} \mathrm{rang}_R(A_\chi)[\chi] \in \mathbb{N}[\mathbb{F}^\vee].$$

Dans cet article on calcule ce caractère à partir du cristal de Dieudonné de G. Le cristal $\mathbb{D}(G)$ est muni d'une action de $\mathbb{F}^\times$ et donc admet une graduation du même type que (1). La relation de convolution implique que cette graduation

1. Noter que cet axiome est légèrement subtil car les deux sommes ne sont pas de même nature.

est de la forme

$$\mathbb{D}(G) = \bigoplus_{\chi \in \mathbb{F}^+} \mathbb{D}(G)_\chi,$$

où $\mathbb{F}^+ \subset \mathbb{F}^\vee$ est l'ensemble des caractères $\chi \in \mathbb{F}^\vee$, tels que si on pose $\chi(0) = 0$, χ est additif. Or, comme G est annulé par p, $\mathbb{D}(G)$ est localement libre comme module sur le faisceau structural du site cristallin de S modulo p (cf. [2, Proposition 4.3.1]). On peut donc parler du rang des $\mathbb{D}(G)_\chi$. On définit le *caractère infinitésimal* de G par

$$\mathfrak{ch}_S(\mathbb{D}(G)) \coloneqq \sum_{\chi \in \mathbb{F}^+} \mathrm{rang}_{R/pR}(\mathbb{D}(G)_\chi)[\chi] \in \mathbb{N}[\mathbb{F}^+],$$

où $\mathrm{rang}_{R/pR}(\mathbb{D}(G)_\chi)$ est le rang, en tant que module sur le faisceau structural du site cristallin de S modulo p, de la composante χ-isotypique de $\mathbb{D}(G)$. Le théorème central de cet article est que le caractère et le caractère infinitésimal de G sont reliés par une relation « exponentielle » :

THÉORÈME 1.1. — *Soit G un schéma en $\mathbb{F}$-vectoriels sur S connexe. Soit $\mathfrak{ch}_S(\mathbb{D}(G)) = \sum_{\chi \in \mathbb{F}^+} n_\chi[\chi]$ le caractère infinitésimal de G et $\mathrm{Ch}_S(G)$ son caractère. Alors on a*

$$\mathrm{Ch}_S(G) = \prod_{\chi \in \mathbb{F}^+} \left(1 + [\chi] + \cdots + [\chi^{p-1}]\right)^{n_\chi}. \tag{2}$$

On montre ce théorème en le réduisant au cas où S est le spectre d'un corps parfait k de caractéristique p. On utilise ensuite que sur le spectre d'un corps parfait le cristal de Dieudonné est équivalent au module de Dieudonné de G. Notons que dans ce cas, on obtient une équivalence entre schémas en $\mathbb{F}$-vectoriels et modules de Dieudonné gradués sur $\mathbb{F}^+$ tels que F et V, respectivement le Frobenius et le Verschibung, définissent des endomorphismes gradués. On prouve ensuite le théorème par un calcul explicite lorsque G est annulé par V, puis par un argument de dévissage on en déduit le théorème dans le cas où V est nilpotent. On conclut finalement par un argument de dualité. Une conséquence de ce théorème est que pour savoir si un schéma en $\mathbb{F}$-vectoriels G est un schéma de Raynaud, il suffit de connaître son caractère infinitésimal, qui ne dépend que du cristal de Dieudonné de G. Cette relation devrait avoir des applications dans des situations où G n'est pas un schéma de Raynaud.

La formule des caractères (2) est apparue dans l'étude des O_D-modules formels spéciaux de Drinfeld (cf. [4]) en vue de la construction d'un modèle formel du premier revêtement de l'espace de Drinfeld (cf. [10]). On note K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ de degré $n = ef$ et D une algèbre à division centrale sur K d'invariant $1/d$, $d \geqslant 2$. On note O_D l'ordre maximal de D et Π une uniformisante de O_D. Un groupe p-divisible muni d'une action de O_D est appelé