

419

ASTÉRISQUE

2020

CHIRAL DIFFERENTIAL OPERATORS VIA
QUANTIZATION OF THE HOLOMORPHIC σ -MODEL

Vassily GORBOUNOV, Owen GWILLIAM & Brian WILLIAMS

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Astérisque est un périodique de la Société Mathématique de France.

Numéro 419, 2020

Comité de rédaction

Marie-Claude ARNAUD	Fanny KASSEL
Christophe BREUIL	Eric MOULINES
Damien CALAQUE	Alexandru OANCEA
Philippe EYSSIDIEUX	Nicolas RESSAYRE
Christophe GARBAN	Sylvia SERFATY
Colin GUILLARMOU	
Nicolas BURQ (dir.)	

Diffusion

Maison de la SMF	AMS
Case 916 - Luminy	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Providence RI 02940
France	USA
commandes@smf.emath.fr	http://www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 45 € (\$ 68)

Abonnement Europe : 665 €, hors Europe : 718 € (\$ 1077)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Fax: (33) 01 40 46 90 96
asterisque@smf.emath.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2020

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN: 0303-1179 (print) 2492-5926 (electronic)

ISBN 978-2-85629-920-3

doi:10.24033/ast.1121

Directeur de la publication : Fabien Durand

419

ASTÉRISQUE

2020

CHIRAL DIFFERENTIAL OPERATORS VIA
QUANTIZATION OF THE HOLOMORPHIC σ -MODEL

Vassily GORBOUNOV, Owen GWILLIAM & Brian WILLIAMS

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Vassily Gorbounov

University of Aberdeen, Higher School of Economics, and the Laboratory of Algebraic
Geometry and Homological Algebra at the Moscow Institute of Physics and Technol-
ogy

vgorb10@gmail.com

Owen Gwilliam

University of Massachusetts, Amherst

gwilliam@math.umass.edu

Brian R. Williams

School of Mathematics, University of Edinburgh, Edinburgh

brian.williams@ed.ac.uk

Texte reçu le 4 avril 2017 ; modifié le 14 juin 2019 ; accepté le 9 octobre 2019.

Mathematical Subject Classification (2010). — 81T15, 81T40, 81T70, 57R32, 17B69, 55N34, 32G81, 53D55, 14D15.

Keywords. — Quantum field theory, vertex algebras, conformal field theory, formal geometry, factorization algebras, anomalies, Witten genus, Batalin-Vilkovisky formalism.

Mots-clefs. — Théorie quantiques des champs, algèbre vertex, théorie conforme des champs, géométrie formelle, algèbre factorisation, anomalies, genres Witten, formalisme Batalin-Vilkovisky.

CHIRAL DIFFERENTIAL OPERATORS VIA QUANTIZATION OF THE HOLOMORPHIC σ -MODEL

by Vassily GORBOUNOV, Owen GWILLIAM & Brian WILLIAMS

Abstract.—The curved $\beta\gamma$ system is a nonlinear σ -model with a Riemann surface as the source and a complex manifold X as the target. Its classical solutions pick out the holomorphic maps from the Riemann surface into X . Physical arguments identify its algebra of operators with a vertex algebra known as the chiral differential operators (CDO) of X . We verify these claims mathematically by constructing and quantizing rigorously this system using machinery developed by Kevin Costello and the second author, which combine renormalization, the Batalin-Vilkovisky formalism, and factorization algebras. Furthermore, we find that the factorization algebra of quantum observables of the curved $\beta\gamma$ system encodes the sheaf of chiral differential operators. In this sense our approach provides deformation quantization for vertex algebras. As in many approaches to deformation quantization, a key role is played by Gelfand-Kazhdan formal geometry. We begin by constructing a quantization of the $\beta\gamma$ system with an n -dimensional formal disk as the target. There is an obstruction to quantizing equivariantly with respect to the action of formal vector fields W_n on the target disk, and it is naturally identified with the first Pontryagin class in Gelfand-Fuks cohomology. Any trivialization of the obstruction cocycle thus yields an equivariant quantization with respect to an extension of W_n by $\widehat{\Omega}_{cl}^2$, the closed 2-forms on the disk. By machinery mentioned above, we then naturally obtain a factorization algebra of quantum observables, which has an associated vertex algebra easily identified with the formal $\beta\gamma$ vertex algebra. Next, we introduce a version of Gelfand-Kazhdan formal geometry suitable for factorization algebras, and we verify that for a complex manifold X with trivialized first Pontryagin class, the associated factorization algebra recovers the vertex algebra of CDOs of X .

Résumé. (Les opérateurs différentiels chiraux via la quantification du modèle sigma holomorphe)—Le système bêta gamma incurvé est un modèle sigma non linéaire de source une surface de Riemann et de cible une variété complexe X . Ses solutions classiques sont données par des cartes holomorphes de la surface de Riemann dans X . Les arguments physiques identifient son algèbre d'opérateurs avec une algèbre vertex connue sous le nom d'opérateurs différentiels chiraux (CDO) de X . Nous vérifions ces