

420

ASTÉRISQUE

2020

LINEAR SYSTEMS OF WAVE EQUATIONS
ON COSMOLOGICAL BACKGROUNDS
WITH CONVERGENT ASYMPTOTICS

Hans RINGSTRÖM

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Comité de rédaction

Marie-Claude ARNAUD	Fanny KASSEL
Christophe BREUIL	Eric MOULINES
Damien CALAQUE	Alexandru OANCEA
Philippe EYSSIDIEUX	Nicolas RESSAYRE
Christophe GARBAN	Sylvia SERFATY
Colin GUILLARMOU	
Nicolas BURQ (dir.)	

Diffusion

Maison de la SMF	AMS
Case 916 - Luminy	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Providence RI 02940
France	USA
commandes@smf.emath.fr	http://www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 70 € (\$ 105)

Abonnement Europe : 665 €, hors Europe : 718 € (\$ 1077)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Fax: (33) 01 40 46 90 96
asterisque@smf.emath.fr • <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2020

Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.

ISSN: 0303-1179 (print) 2492-5926 (electronic)

ISBN 978-2-85629-926-5

doi:10.24033/ast.1123

Directeur de la publication : Fabien Durand

420

ASTÉRISQUE

2020

LINEAR SYSTEMS OF WAVE EQUATIONS
ON COSMOLOGICAL BACKGROUNDS
WITH CONVERGENT ASYMPTOTICS

Hans RINGSTRÖM

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Hans Ringström

KTH Royal Institute of Technology and Institut Mittag-Leffler,
Department of Mathematics,
KTH Royal Institute of Technology,
SE-100 44 Stockholm,
Sweden

Texte reçu le 29 septembre 2017 ; révisé le 23 janvier 2020 ; accepté le 9 mars 2020.

Mathematical Subject Classification (2010). — 35L10, 35L15, 35Q75, 53B30, 53C50, 58J45, 83F05.

Keywords. — Hyperbolic equations on manifolds, wave equations, asymptotic behavior, energy estimates, Lorentz manifolds, general relativity, cosmology.

Mots-clefs. — Équations hyperboliques sur des variétés, équations d'ondes, comportement asymptotique, estimations d'énergie, variétés Lorenziennes, relativité générale; cosmologie.

LINEAR SYSTEMS OF WAVE EQUATIONS ON COSMOLOGICAL BACKGROUNDS WITH CONVERGENT ASYMPTOTICS

by Hans RINGSTRÖM

Abstract. — The subject of the book is linear systems of wave equations on cosmological backgrounds with convergent asymptotics. The condition of convergence corresponds to the requirement that the second fundamental form, when suitably normalized, converges. The model examples are the Kasner solutions. The main result of the article is optimal energy estimates. However, we also derive asymptotics and demonstrate that the leading order asymptotics can be specified (also in situations where the asymptotics are not convergent).

It is sometimes argued that if the factors multiplying the spatial derivatives decay exponentially (for a system of wave equations), then the spatial derivatives can be ignored. This line of reasoning is incorrect: we give examples of equations such that 1) the factors multiplying the spatial derivatives decay exponentially, 2) the factors multiplying the time derivatives are constants, 3) the energies of individual modes of solutions asymptotically decay exponentially, and 4) the energies of generic solutions grow as $\exp[\exp(t)]$ as $t \rightarrow \infty$.

When the factors multiplying the spatial derivatives grow exponentially, the Fourier modes of solutions oscillate with a frequency that grows exponentially. To obtain asymptotics, we fix a mode and consider the net evolution over one period. Moreover, we replace the evolution (over one period) with a matrix multiplication. We cannot calculate the matrices explicitly, but we approximate them. To obtain the asymptotics we need to calculate a matrix product where there is no bound on the number of factors, and where each factor can only be approximated. Nevertheless, we obtain detailed asymptotics. In fact, it is possible to isolate an overall behavior (growth/decay) from the (increasingly violent) oscillatory behavior. Moreover, we are also in a position to specify the leading order asymptotics.

Résumé (Systèmes linéaires d'équations d'ondes sur des fonds cosmologiques asymptotiquement convergents). — Cet ouvrage concerne les systèmes linéaires d'équations d'ondes sur des fonds cosmologiques asymptotiquement convergents. Cette condition de convergence porte une version renormalisée de la deuxième forme fondamentale et est en particulier vérifiée pour les solutions de type Kasner. Le résultat principal de l'article est la démonstration d'estimations d'énergie optimales. De plus, nous