CONCOURS SMF JUNIOR 2020

1. Algèbre

Soit G un groupe fini. On note T la table des caractères de G : c'est le tableau donnant les valeurs des caractères irréductibles complexes de G et, par la suite, on verra T comme une matrice carrée à coefficients dans $\mathbb{C}$. (Les lignes de T sont indexées par les caractères irréductibles de G et les colonnes de T sont indexées par les classes de conjugaison de G.)

Une ligne ou une colonne de T est dite réelle si elle est formée de nombres réels.

(1) Prouvez que T a autant de lignes réelles que de colonnes réelles. En déduire que G est d'ordre impair si et seulement si T possède une seule ligne réelle.

On s'intéresse à présent aux lignes et aux colonnes de T entières, c'est-à-dire formées de nombres entiers. On démontre facilement (comment ?) qu'une ligne ou une colonne est entière si et seulement si elle est formée de nombres rationnels. On dit que G satisfait à la propriété (E) si T a autant de lignes que de colonnes entières.

(2) On suppose que l'exposant [1] de G est de la forme p^α ou $2p^\alpha$, où p est un nombre premier impair et α est un entier naturel. Prouvez que G satisfait à la propriété (E).

(3) Pouvez-vous donner d'autres classes de groupes qui satisfont à la propriété (E) ?

(4) *(Bougrement compliqué.)* Pouvez-vous donner un groupe fini G qui ne satisfait pas à la propriété (E) ?

1. L'exposant de G est le PPCM des ordres des éléments de G.

2. Analyse

Un point $X = (i, j)$ de $\mathbb{Z}^2$ a quatre *voisins* :

$$X_d := (i + 1, j),\ X_g := (i - 1, j),\ X_h := (i, j + 1),\ X_b := (i, j - 1).$$

Nous considérons l'équation fonctionnelle d'inconnue $f : \mathbb{Z}^2 \to]0, \infty[$,

$$f(X) = \gamma_d\, f(X_d) + \gamma_g\, f(X_g) + \gamma_h\, f(X_h) + \gamma_b\, f(X_b),\ \forall X \in \mathbb{Z}^2, \tag{EF}$$

où les constantes γ_d, γ_g, γ_h, γ_b satisfont à la condition

$$\gamma_d,\ \gamma_g,\ \gamma_h,\ \gamma_b > 0,\ \ \gamma_d + \gamma_g + \gamma_h + \gamma_b = 1. \tag{G}$$

(1) Clairement, si f est une constante strictement positive, alors f est une solution de (EF). Donner un exemple de γ_d, γ_g, γ_h, γ_b telles que (EF) ait des solutions non-constantes.

Pour $f : \mathbb{Z}^2 \to]0, \infty[$, soit

$$M(f) := \sup \left\{ \frac{f(Y)}{f(X)}\, ;\ X \in \mathbb{Z}^2,\ Y \text{ est un voisin de } X \right\}.$$

(2) Si $\gamma_d = \gamma_g$ et $\gamma_h = \gamma_b$, trouver les solutions de (EF) telles que le sup dans la définition de $M(f)$ soit atteint.

(3) Pour quelles valeurs de γ_d, γ_g, γ_h, γ_b *toute* solution de (EF) est-elle constante ?

3. Combinatoire

Soit $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Quelles sont toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que

$$f(x+1) + 1 = f(f(x) + 1)$$

pour tout x dans $\mathbb{N}$?

4. Géométrie

Soient $n \geqslant 2$ et $k \geqslant 1$ deux entiers. On définit l'ensemble $\mathcal{C}_{n,k}$ des fonctions $f := (f_1, \ldots, f_n)$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ définies sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, vérifiant

$$\sum_{j=1}^{n} (x_j)^k f_j(x_1, \ldots, x_n) = 0, \qquad \forall\ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \tag{4.1}$$

(1) Montrer que $\mathcal{C}_{n,k}$ est non-vide si n est pair.

(2) Montrer que $\mathcal{C}_{n,k}$ est non-vide si k est pair.

(3) Montrer que $\mathcal{C}_{n,k}$ est vide si n et k sont impairs.

5. Modélisation

On considère une société qui achète et vend des objets d'occasion (on peut penser à des livres, des DVD, ou des jeux vidéos). Pour simplifier, on suppose qu'il n'y a qu'un seul type d'objets, toujours en bon état. On s'intéresse dans ce problème à la politique optimale d'achat et de vente de la société.

Considérons un intervalle de temps $[0, T]$ (avec $T > 0$) et un prix de référence P.

A chaque instant $t \in [0, T]$ on note S_t le nombre d'objets en stock au sein de la société. On suppose qu'entre t et $t + dt$, si la société propose d'acheter une unité de l'objet au prix $P - \delta_t^{\text{achat}}$, alors la probabilité d'un tel achat au cours de la période est $e^{-\delta_t^{\text{achat}}} dt$. De même, entre t et $t + dt$, si la société propose de vendre une unité de l'objet au prix $P + \delta_t^{\text{vente}}$, alors la probabilité d'une telle vente au cours de la période est $e^{-\delta_t^{\text{vente}}} dt$.

N.B. : On supposera, pour simplifier, que les valeurs de δ_t^{achat} et δ_t^{vente} peuvent être positives comme négatives (même si le prix en devenait négatif).

On suppose que la société cesse de proposer des prix à la vente lorsque, et tant que, son stock est à 0 et cesse de proposer des prix à l'achat lorsque, et tant que, son stock est égal à une valeur maximale notée N.

Stocker les objets requiert de l'espace et nous supposons que la société paye entre t et $t + dt$ un coût de stockage $c(S_t)dt$ où $c : \{0, \dots, N\} \to \mathbb{R}$ est une fonction (a priori croissante).

Le but de la société est de choisir sa politique tarifaire optimalement de manière à maximiser l'espérance de son profit sur l'intervalle $[0, T]$, en supposant que les objets restant stockés à l'instant T seront valorisés au prix P.

(1) Modéliser le problème et déterminer la meilleure stratégie d'achat/vente de la société.

(2) Montrer que l'espérance maximale de gain par unité de temps, c'est-à-dire l'espérance maximale de gain sur $[0, T]$ divisée par T, converge vers une limite finie lorsque l'horizon T tend vers l'infini. Caractériser simplement cette limite.

Indice :

Pour traiter ce problème, on pourra introduire $u_0^T, u_1^T, \dots, u_N^T : [0, T] \to \mathbb{R}$ des fonctions (au nombre de $N+1$), appelées fonctions valeurs, telles que, pour $n \in \{0, \dots, N\}$ et $t \in [0, T]$, $u_n^T(t)$ représente l'espérance de gain la plus grande possible entre t et T si la société a un stock de n objets à l'instant t. On pourra en particulier justifier (heuristiquement dans un premier temps) que $u_0^T, u_1^T, \dots, u_N^T$ vérifient

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{dt} u_n^T(t) - c(n) &+ 1_{0 \le n < N} \max_{\delta^{\text{achat}}} \left\{ e^{-\delta^{\text{achat}}} \left(u_{n+1}^T(t) - u_n^T(t) - P + \delta^{\text{achat}} \right) \right\} \\ &+ 1_{0 < n \le N} \max_{\delta^{\text{vente}}} \left\{ e^{-\delta^{\text{vente}}} \left(u_{n-1}^T(t) - u_n^T(t) + P + \delta^{\text{vente}} \right) \right\}, \quad \forall (t, n) \in [0, T] \times \{0, \dots, N\} \end{aligned} \tag{5.1}$$

et réalisent la condition terminale

$$u_n^T(T) = nP, \quad \forall n \in \{0, \dots, N\}. \tag{5.2}$$

6. Probabilités–Statistiques

Les problèmes de bandit manchot apparaissent quand on cherche à optimiser un gain lors d'une suite d'expériences où on dispose à chaque instant d'un certain nombre de choix (dans le problème original, sur quelle machine à sous jouer). Par exemple, lorsqu'on cherche à optimiser le plus vite possible le traitement de patients en choisissant entre deux traitements.

On considère ici une variante de problème de bandit manchot où le nombre de bras peut augmenter au cours du temps. La récompense du bras i suit la loi $\mathcal{N}(\mu_i, 1)$. On appelle μ_i la caractéristique du bras. À l'instant initial $t = 0$, le bandit n'a qu'un seul bras de caractéristique $\mu_1 = 0$. Aux instants $t \geqslant 1$, on peut au choix :

— Tirer un bras (on choisit un bras i et on observe une variable aléatoire $Y_t \sim \mathcal{N}(\mu_i, 1)$. Conditionnellement à μ_i, cette observation Y_t est indépendante de toutes les observations $(Y_s)_{1\leqslant s<t}$ précédentes ainsi que des caractéristiques des autres bras) ;

— Générer un nouveau bras à partir d'un bras existant puis le tirer : on choisit un bras i et on génère un nouveau bras j de caractéristique $\mu_j \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma^2)$ pour un réel $\sigma > 0$ connu. Conditionnellement à μ_i, cette caractéristique μ_j est indépendante de toutes les observations $(Y_s)_{1\leqslant s<t}$ précédentes ainsi que des caractéristiques des autres bras. Ensuite, on tire ce nouveau bras.

L'objectif est de maximiser la croissance de la somme $\sum_{s=1}^{t} Y_s$.

(1) Proposer un algorithme et une fonction f ayant la croissance la plus rapide possible tels qu'il existe une constante $c > 0$ telle qu'en suivant cet algorithme,

$$\mathbb{P}\left(\sum_{s=1}^{t} Y_s \geqslant cf(t)\right) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Un algorithme ne peut utiliser à chaque étape que les observations obtenues aux étapes précédentes, ainsi qu'un éventuel aléa interne, pour prendre sa décision.

(2) Trouver une fonction g ayant la croissance la plus lente possible telle qu'il existe une constante $C < \infty$ telle que, quel que soit l'algorithme choisi,

$$\mathbb{P}\left(\sum_{s=1}^{t} Y_s \leqslant Cg(t)\right) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

On mettra $f(t)$ et $g(t)$ sous la forme la plus simple possible, par exemple un produit de puissances de t et de $\log t$. On cherchera à rendre f et g aussi proches que possible.

7. Systèmes dynamiques

Ce problème vise à donner une nouvelle démonstration d'une formule établie par Milnor et Thurston pour l'entropie de certaines applications de l'intervalle.

La question (1) étudie le cas modèle d'une application affine par morceaux. La question (2) traite le cas plus subtil des applications quadratiques.

Soit f une fonction continue sur $I = [a,b]$ telle que $f(I) \subseteq I$. On dit que f est monotone par morceaux s'il existe une subdivision finie $a = c_0 < c_1 < \ldots < c_K = b$ telle que f soit monotone sur chaque $[c_i, c_{i+1}]$. On note $\mathrm{Mon}(f)$ le plus petit entier $K \geqslant 1$ possédant cette propriété. On peut définir *l'entropie de* f par deux formules équivalentes :

$$h(f) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathrm{Mon}(f^n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \mathrm{Var}(f^n), \tag{7.1}$$

où $f^n = f \circ \ldots \circ f$ (composée n fois) et $\mathrm{Var}(g)$ est la variation totale de g. Dans la formule précédente, on admet l'existence des limites et leur égalité (résultats de Misiurewicz et Szlenk). Par convention, la dérivée de la fonction $x \mapsto |x|$ est

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \in \{\pm 1, 0\}.$$

Si nécessaire, le résultat d'une question peut être admis pour continuer le problème.

(1) Applications tentes. Pour $s \in]1,2]$ et $q = \frac{1}{s-1}$, on considère l'application $T_s : [-q,q] \to [-q,q]$ définie par $T_s(x) = s|x| - 1$.

(a) Montrer que $h(T_s) = \ln s$.

(b) On suppose dans cette question qu'il existe un entier $m \geqslant 0$ minimal tel que $T_s^{m+1}(0) = 0$. Trouver une formule explicite de T_s^n pour $n \geqslant 1$. En déduire que $1/s$ est une racine du polynôme

$$D_s(t) = 1 + d_1 t + d_2 t + \ldots + d_m t^m,$$

où $d_i = \mathrm{sgn}(T_s^i)'(-1) \in \{-1, 1\}$ pour $i = 0, \ldots, m$.

(c) On pose $\phi_n(s) = T_s^n(0)$. Montrer que ϕ_n est dérivable en s si $\phi_k(s) \neq 0$ pour tout $k = 1, \ldots, n-1$. Montrer que pour tout $s \in]1,2]$ et $n \geqslant 1$ tels que ϕ_n soit dérivable en s,

$$|\phi_n'(s)| < q_s^2 s^n.$$

Ensuite, en supposant $|\phi_n'(s)| > q^2$, montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que si $|\phi_k'(s)|$ est dérivable en s et $k \geqslant n$, alors

$$\alpha\, s^k < |\phi_k'(s)|.$$

Pour la suite, on admettra que pour tout $s_0 > 1$ il existe des constantes $C, N > 0$ telles que pour tout $s > s_0$ et $n \geqslant N$, si ϕ_n est dérivable en s, alors $C^{-1} s^n < |\phi_n'(s)| < C s^n$.

(d) Pour un $s \in]1,2]$ fixé, on suppose dans cette question que $T_s^n(0) \neq 0$ pour tout $n \geqslant 1$. On considère l'application $D_s(t) = \sum_{i \geqslant 0} d_i t^i$ sur le disque unité. Montrer que

$$D_s\left(\frac{1}{s}\right) = 0.$$

(2) <u>*Applications quadratiques.*</u> Pour $c \in [-2, 1/4]$ et $p = \frac{1}{2}(1+\sqrt{1-4c})$, on considère l'application $f_c : [-p, p] \to [-p, p]$ définie par

$$f_c(x) = x^2 + c.$$

Noter que $f_c(p) = p > 0$. On admet l'existence de $c_F \approx -1.4$ tel que $h(f_c) = 0$ si $c \in [c_F, 1/4]$ et $h(f_c) > 0$ si $c \in [-2, c_F[$. Pour la suite, on suppose que $c \in [-2, c_F[$. On note $C_c := \bigcup_{n\geqslant 0} f_c^{-n}(0)$ l'ensemble des préimages du point critique 0.

(a) Dans cette question, on suppose que $\overline{C_c} = [-p, p]$ et qu'il existe $s \in]1, 2]$ tel que

$$\operatorname{sgn}(f_c^n)'(c) = \operatorname{sgn}(T_s^n)'(-1) \neq 0$$

pour tout $n \geqslant 0$. Montrer que T_s et f_c sont conjuguées, i.e., qu'il existe un homéomophisme $g : [-q, q] \to [-p, p]$ tel que

$$g \circ T_s = f_c \circ g. \tag{7.2}$$

En déduire que, dans ce cas, $h(f_c) = \ln s$.

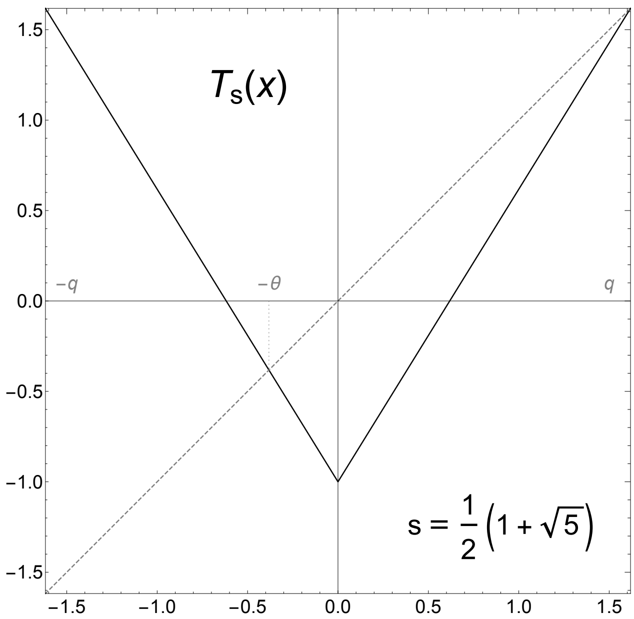
(b) Pour $s \in]1, 2]$, on dit que T_s est renormalisable d'ordre $n \geqslant 2$ s'il existe un intervalle I centré en 0 et un paramètre $s' \in]1, 2]$ tels que $T_s^n : I \to I$ soit conjuguée à $T_{s'}$ et que les intérieurs de $I, T_s(I), \ldots, T_s^{n-1}(I)$ soient disjoints. Montrer que dans ce cas $s' = s^n$. Si $s \in]1, \sqrt{2}]$, montrer que T_s est renormalisable d'ordre 2. En déduire que T_s est n fois renormalisable d'ordre 2 si et seulement si $s \in]1, 2^{2^{-n}}]$. Montrer que les seuls ordres de renormalisation possibles des applications T_s sont les puissances de 2.

(c) *(question difficile)* On suppose que $\overline{C_c} \neq [-p, p]$. On admet qu'il existe $J = [-r, r]$ et un entier $n \geqslant 3$ qui n'est pas une puissance de 2, tel que $f_c^n(J) \subseteq J$, $f_c^n(\partial J) \subseteq \partial J$ et que les ensembles $J, f_c(J), \ldots, f_c^{n-1}(J)$ soient disjoints. On suppose que n est minimal avec ces propriétés. On pose $W := \bigcup_{k\geqslant 0} f_c^{-k}(J)$. Observer que $C_c \subseteq W$. On admet que $\overline{W} = [-p, p]$ et qu'il existe $s \in]1, 2]$ tel que $T_s^n(0) = 0$ avec $\operatorname{sgn}(f_c^i)'(c) = \operatorname{sgn}(T_s^i)'(-1)$ pour tout $i = 0, \ldots, n-2$.

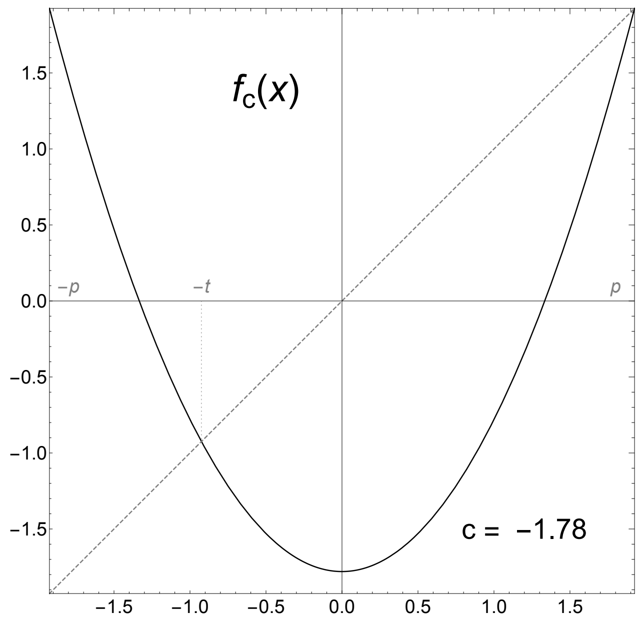
Montrer qu'il existe une application monotone, injective $g : [-q, q] \to [-p, p]$ telle que $\overline{\operatorname{Im} g} = \partial W$ et satisfaisant à la condition (7.2). On dit que g est une semi-conjugaison entre T_s et f_c.

(d) *(question très difficile)* Montrer que, dans ce cas, on a encore $h(f_c) = \ln s$.

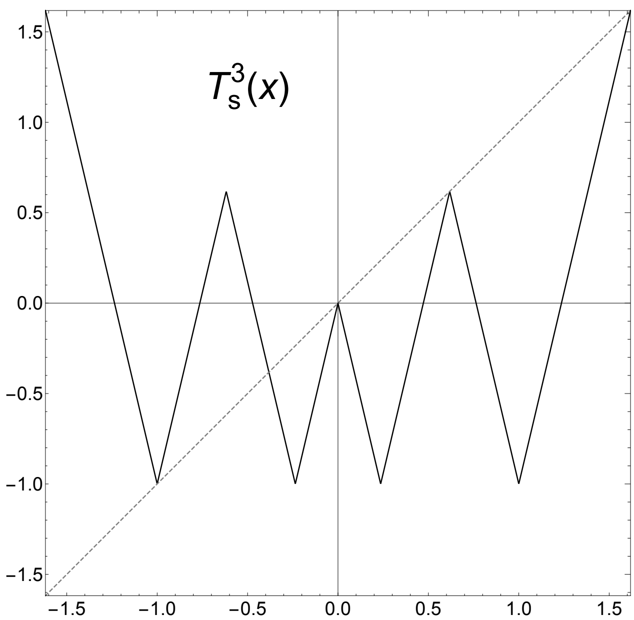
Avec un peu plus de travail (non demandé ici) on peut montrer que pour tout $c \in [-2, c_F[$, f_c est conjuguée ou semi-conjuguée à T_s avec $s = e^{h(f_c)}$. On obtient alors que pour tout $c \in [-2, c_F[$, le point $e^{-h(f_c)}$ est le premier zéro de la fonction $D_c(t) = \sum_{i\geqslant 0} t^i \operatorname{sgn}(f_c^i)'(c)$. C'est une variante de la formule de Milnor et Thurston.



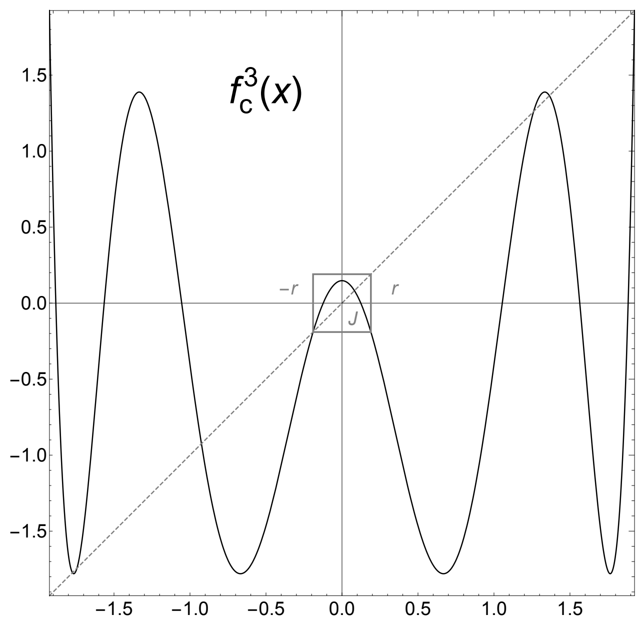
T_s avec $T_s^3(0) = s^2 - s - 1 = 0$.



f_c avec $c = -1.78$.



$h(T_s) = \ln s$.



f_c semi-conjuguée à T_s, $h(f_c) = \ln s$.

8. Théorie de la mesure

On note $\mathbb{P}$ la mesure de probabilité d'un univers probabilisé de référence Ω (et ω un élément générique de Ω). Soit $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires *indépendantes* de Rademacher :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \mathbb{P}(\varepsilon_n = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_n = -1) = \frac{1}{2}\cdot$$

On note de plus $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires *indépendantes* gaussiennes standard :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathbb{P}(g_n \leqslant t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\cdot$$

Un théorème de Marcus et Pisier (1977) affirme que les deux propriétés suivantes sont équivalentes pour toute suite de coefficients $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

i) avec probabilité 1, la série de fonctions $x \mapsto \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon_n(\omega) c_n e^{inx}$ converge uniformément sur $[-\pi, \pi]$;

ii) avec probabilité 1, la série de fonctions $x \mapsto \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} g_n(\omega) c_n e^{inx}$ converge uniformément sur $[-\pi, \pi]$.

On se propose ici de construire un contre-exemple particulier en dimension 2 qui fait écho au fait que les fonctions propres de certains opérateurs de type Laplacien peuvent avoir des propriétés de concentration.

On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $\|(x, y)\| = \max(|x|, |y|)$ et on note $B(M, r)$ les boules ouvertes associées (de centre $M \in \mathbb{R}^2$ et de rayon $r > 0$).

(1) Considérons une suite réelle $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante, strictement positive et vérifiant $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} r_n^2 < +\infty$. Montrer qu'il existe une constante numérique explicite $C > 0$ et une suite de points $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^2$ telles que les boules ouvertes $B(M_n, r_n)$ vérifient les deux propriétés suivantes :
- les boules $B(M_n, r_n)$ sont disjointes,
- les boules $B(M_n, r_n)$ sont incluses dans une boule de rayon $C\sqrt{\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} r_n^2}$ (on ne demande pas de trouver la meilleure constante C).

(2) Pour tout entier $T \in \mathbb{N}^\star$, démontrer que l'on a

$$\sup_{N\geqslant 3} \sum_{n=N}^{2N} \mathbb{P}\Big(\frac{g_n}{T} \geqslant \sqrt{\ln(\ln(n))}\Big) = +\infty,$$

et en déduire à l'aide d'un lemme de Borel-Cantelli que l'on a

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{n\geqslant 3}\Big(\frac{|g_n|}{\sqrt{\ln(\ln(n))}}\Big) = +\infty\Big) = 1.$$

(3) Justifier l'existence d'une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$, d'une suite de boules ouvertes disjointes $B(M_n, r_n)$ et incluses dans la boule fermée unité $\overline{B((0,0),1)}$ et enfin d'une suite de coefficients $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que si F_n est la fonction indicatrice de la boule ouverte $B(M_n, r_n)$ alors
- avec probabilité 1, la série de fonctions $x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon_n(\omega) c_n F_n(x)$ converge uniformément dans $\overline{B((0,0),1)}$.
- avec probabilité 1, la série de fonctions $x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} g_n(\omega) c_n F_n(x)$ ne converge pas uniformément dans $\overline{B((0,0),1)}$.

9. Théorie des nombres

Soit B un entier naturel strictement positif. Démontrer l'existence d'un sous-ensemble $\mathcal{S}$ de $\mathbb{N}$ tel que pour tout nombre premier p chaque classe de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sauf une possède exactement B représentants dans $\mathcal{S}$.

Existe-t-il des valeurs de B pour lesquelles on peut choisir la classe avec une infinité de représentants arbitrairement dans les différents corps finis $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?

10. Topologie

Soit $E = \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, muni de la topologie usuelle. Soit $f\colon E \to E$ une fonction, dont les itérés sont notés f^k, pour $k \in \mathbb{N}$ ($f^{k+1} = f \circ f^k$ et f^0 est l'identité).

On dit que f est une *dynamique faiblement bornée* sur E si f est continue et si toute orbite de f, c'est-à-dire tout ensemble de la forme $\left\{f^k(x) \mid k \in \mathbb{N}\right\}$ où $x \in E$, est incluse dans un compact de E. On dit que f est une *dynamique fortement bornée* sur E si f est continue et si pour tout compact K de E, l'union des itérés $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} f^k(K)$ est incluse dans un compact de E. Déterminer en fonction de n si toute dynamique faiblement bornée sur $\mathbb{R}^n$ est nécessairement fortement bornée.

On pourra ensuite, si on le souhaite, s'intéresser à d'autres espaces topologiques.