SINGULARITÉS IRRÉGULIÈRES
CORRESPONDANCE ET DOCUMENTS

Pierre Deligne
Bernard Malgrange
Jean-Pierre Ramis

Documents Mathématiques

série dirigée par Pierre COLMEZ

Secrétariat : Nathalie Christiaën
Documents Mathématiques
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 1629-4939

ISBN 978-2-85629-241-9

Directeur de la publication : Stéphane JAFFARD

DOCUMENTS MATHÉMATIQUES 5

SINGULARITÉS IRRÉGULIÈRES

CORRESPONDANCE ET DOCUMENTS

Pierre Deligne
Bernard Malgrange
Jean-Pierre Ramis

Société Mathématique de France 2007

TABLE DES MATIÈRES

Introduction

Correspondance

Textes

Notes

PRÉFACE

Les lettres qu'on trouvera dans ce recueil couvrent la période 1976-1991 (à deux exceptions près : 1996 et 2002). Le thème général est l'étude des singularités irrégulières des équations différentielles linéaires : irrégularité, développements asymptotiques, faisceau de Stokes, analogues Gevrey, problèmes de modules, multisommabilité, Galois et π_1 sauvage, et (de façon moins centrale) cycles évanescents et Fourier. Il s'agit pour l'essentiel d'une correspondance entre Pierre Deligne, Bernard Malgrange et Jean-Pierre Ramis, mais certaines lettres ont d'autres destinataires ou expéditeurs.

Quatre textes ont été adjoints à ces lettres. Tout comme elles, ils avaient connu à l'époque une diffusion par voie de photocopies, mais n'avaient jamais été publiés.

La plus grande partie des lettres et textes a été rassemblée par Bernard Malgrange au printemps 2005 et a été saisie par Mme Arlette Guttin-Lombard (Institut Fourier, Grenoble), Mme Marielle Randria-Riou et M. Florent Arnaud (SMF, Paris), que nous remercions ; nous remercions aussi Mme Dottie Phares (IAS, Princeton) pour la saisie de certains textes.

À des modifications orthographiques ou typographiques mineures près, ces documents ont été reproduits tels quels. Les commentaires et corrections éventuels des auteurs et de leurs correspondants sont rassemblés sous forme de notes en fin de volume, à l'exception du texte de Pierre Deligne sur la théorie de Hodge irrégulière, dont une nouvelle version accompagne la version originelle. Ces notes sont indiquées dans le corps du volume par des chiffres de renvois dans la marge.

Mars 2007

D. Bertrand & C. Sabbah

L'initiative de ce volume est due à Daniel Bertrand. Les auteurs le remercient, ainsi que Claude Sabbah, pour leur participation à sa mise au point.

Mai 2007

P. Deligne, B. Malgrange & J.-P. Ramis

INTRODUCTION

Documents Mathématiques
5, 2007, p. 1–2

POURQUOI UN GÉOMÈTRE ALGÉBRISTE S'INTÉRESSE-T-IL AUX CONNEXIONS IRRÉGULIÈRES ?

par

Pierre Deligne

Vers 1970, je regardais les fibrés vectoriels à connexion à singularités irrégulières, comme « pathologiques ». Je n'en suis revenu qu'après avoir assimilé l'analogie entre le fibré à connexion $(\mathcal{O}, d+dx)$ sur la droite, de section horizontale $\exp(-x)$, et les faisceaux ℓ-adiques $\mathcal{L}(\psi)$ déduits de revêtements d'Artin-Schreier, sur la droite en caractéristique p. La question naturelle devenait : qu'est ce que la théorie ℓ-adique suggère pour les $\mathcal{D}$-modules holonomes à singularités non nécessairement régulières – ou certains d'entre eux. J'ai réfléchi aux phénomènes de caractéristique p suivants.

(a) Un faisceau ℓ-adique fait souvent partie – au moins conjecturalement – d'une famille « compatible » de faisceaux ℓ'-adiques, ℓ' parcourant les nombres premier $\neq p$ (ou les places finies premières à p d'un corps de nombres).

(b) Pour $f : X \to S$ propre et S de dimension un, on dispose d'une théorie des cycles évanescents reliant la singularité de $R^i f_* \mathcal{F}$ en $s \in S$ à des propriétés locales de $\mathcal{F}$ aux points de X au-dessus de s.

(c) La cohomologie est munie d'une action de Frobenius ; les valeurs absolues complexes (resp. p-adiques) des valeurs propres sont liées à des filtrations par le poids (resp. de Hodge).

(d) Le déterminant de Frobenius est contrôlé par les constantes *locales* d'équations fonctionnelles de fonctions L.

Voici ce qui m'est suggéré par (a) (b) (c) (d).

(a′) Il devrait exister une notion de $\mathcal{D}$-module holonome muni d'une structure de Betti. Si le $\mathcal{D}$-module $\mathcal{M}$ sur X projectif est à singularités régulières, une telle structure est un faisceau pervers M (coefficients : $\mathbb{Q}$), muni d'un isomorphisme, dans la catégorie dérivée, du complexe de de Rham de $\mathcal{M}$ avec

$M \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$. Une structure de Betti doit induire sur la cohomologie de de Rham une $\mathbb{Q}$-structure. Si $\mathcal{M}$ est défini sur $\mathbb{Q}$, cela fournit une autre $\mathbb{Q}$-structure, et la comparaison des deux définit des périodes, telles

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}\,.$$

Les déterminants de matrices de périodes devraient être analogues aux déterminants de Frobenius.

La théorie des structures de Stokes fournit une notion de structure de Betti si $\dim(X) = 1$. On voudrait une définition en toute dimension, et une stabilité par les six opérations $(Rf_*, Rf_!, f^*, Rf^!, \otimes^{\mathbb{L}}, RHom)$. On est loin du compte.

On aimerait aussi disposer d'une notion de $\mathcal{D}$-modules holonomes munis de « compagnons » en presque toute caractéristique p, dépendant du choix d'un caractère ψ du groupe additif de $\mathbb{F}_p$, à valeur dans une extension finie E_λ de $\mathbb{Q}_\ell$. Exemple : $(\mathcal{O}, d + dx)$ a pour compagnons les $\mathcal{L}(\psi)$. Les seuls résultats précis dans ce sens sont dans [An86].

(b′) En géométrie algébrique, la différence entre « complété de S en s » et « hensélisé de S en s » est souvent de goût plutôt que de fond. Si on veut transposer des énoncés ℓ-adiques au cas des $\mathcal{D}$-modules sur une courbe complexe S, savoir s'il faut traduire « hensélisé, ou complété » en s comme « voisinage de s » ou « complété formel de S en s » est crucial. J'ai mis du temps à comprendre qu'une théorie des cycles évanescents parallèle à la théorie ℓ-adique ne peut donner d'information sur $R^i f_*$ qu'au voisinage formel de s.

(c′) Voir le texte « Théorie de Hodge irrégulière ».

(d′) Pour transposer telles quelles les démonstration de Laumon [La87] en un calcul de déterminant de périodes, il faudrait disposer d'une notion de structure de Betti au moins pour X de dimension 2, et d'une théorie des cycles évanescents pour $\mathcal{D}$-modules munis d'une structure de Betti. Un manuscrit inachevé de Beilinson, Bloch, Esnault et moi-même s'efforce à le faire à moindres frais.

Références

[An86] G. Anderson – « Cyclotomy and an extension of the Taniyama group », *Compositio Math.* **57** (1986), p. 153–217, disponible sur `www.numdam.org`.

[La87] G. Laumon – « Transformation de Fourier, constantes d'équations fonctionnelles et conjectures de Weil », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **65** (1987), p. 131–210.

Documents Mathématiques
5, 2007, p. 3–5

QUELQUES SOUVENIRS

par

Bernard Malgrange

Un état de la théorie des points singuliers d'équations différentielles linéaires vers 1970 serait sans doute une bonne introduction à ce recueil. Je ne me sens pas capable de le faire, et je préfère dire quelques mots de la question suivante : comment ai-je commencé à m'intéresser à ce sujet ?

Avec une double formation de spécialiste d'équations aux dérivées partielles et de singularités d'applications différentiables, il était *a posteriori* naturel que je m'y intéresse ; je note toutefois que, parmi les spécialistes de ces domaines, ma démarche était et est restée assez isolée.

Sauf erreur, la première question qui me vint à l'esprit, par pure curiosité, était la suivante : soit

$$P = \sum_k a_k(x) \frac{d^k}{dx^k}$$

un opérateur différentiel à coefficients dans l'espace $\mathcal{O}$ des germes en $0 \in \mathbb{C}$ de fonctions holomorphes : alors $P\mathcal{O}$ est-il fermé dans $\mathcal{O}$? (question alors typique d'un spécialiste d'e.d.p.) Je vis facilement que la réponse était positive, mais encore que P était « à indice », *i.e.* que le noyau et le conoyau de $\{P : \mathcal{O} \to \mathcal{O}\}$ étaient de dimension finie ; de plus l'indice (*i.e.* la différence des deux dimensions) est le même que celui de la partie principale, *i.e.* $n - v(a_n)$, n l'ordre en d/dx de P et $v(a_n)$ l'ordre en 0 de a_n. Ceci résulte facilement du « théorème de perturbation » d'Atkinson-Schwartz, bien connu à l'époque car utilisé depuis longtemps par Atiyah-Singer dans leur théorème de l'indice des opérateurs elliptiques.

Ayant obtenu ce résultat (en 1970, ou peut-être début 1971), il me parut invraisemblable qu'un résultat aussi frappant et de démonstration aussi élémentaire n'ait pas été connu depuis longtemps. Je cherchais donc dans la